



第3章 灰度变换与空间滤波

它的与众不同之处在于，是透过光线看阴影还是透过阴影看亮度。

——大卫·林赛

引言

术语空间域指图像平面本身，这类图像处理方法直接以图像中的像素操作为基础。这是相对于变换域中的图像处理而言的，正如 2.6.7 节所介绍的和第 4 章将要详细讨论的那样，变换域的图像处理首先把一幅图像变换到变换域，在变换域中进行处理，然后通过反变换把处理结果返回到空间域。空间域处理主要分为灰度变换和空间滤波两类。正像本章您将了解到的那样，灰度变换在图像的单个像素上操作，主要以对比度和阈值处理为目的。空间滤波涉及改善性能的操作，如通过图像中每一个像素的邻域处理来锐化图像。接下来几节我们将讨论一些经典的灰度变换和空间滤波技术。我们还将讨论模糊技术的某些细节，以便允许我们在灰度变换和空间滤波算法的公式化表示中并入不太精确的以知识为基础的信息。

3.1 背景知识

3.1.1 灰度变换和空间滤波基础

本节讨论的所有图像处理技术都是在空间域进行的。由 2.4.2 节的讨论，我们知道空间域就是简单的包含图像像素的平面。如 2.6.7 节定义的那样，与（第 4 章的主题）频率域相反，空间域技术直接在图像像素上操作，例如，对于频率域来说，其操作在图像的傅里叶变换上执行，而不针对图像本身。正如您将在阅读全书的过程中了解到的那样，某些图像处理任务在空间域中执行更容易或更有意义，而另一些任务则更适合使用其他方法。通常，空间域技术在计算上更有效，且在执行上需要较少的处理资源。

本章讨论的空间域处理可由下式表示：

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (3.1-1)$$

其中 $f(x, y)$ 是输入图像， $g(x, y)$ 是处理后的图像， T 是在点 (x, y) 的邻域上定义的关于 f 的一种算子。算子可应用于单幅图像（本章中我们的主要关注点）或图像集合，例如，如 2.6.3 节中讨论的那样，为降

有时也使用其他形状的邻域，如圆的数字近似，但矩形邻域是目前为止最好的邻域，因为它们在计算机上实现起来更为容易。

低噪声而对图像序列执行逐像素的求和操作。图 3.1 显示了式 (3.1-1) 在单幅图像上的基本实现。所示的点 (x, y) 是图像中的一个任意位置, 包含该点的小区域是点 (x, y) 的邻域, 如 2.6.5 节解释的那样。典型地, 邻域是中心在 (x, y) 的矩形, 其尺寸比图像小得多。

图 3.1 中给出的处理由以下几步组成: 邻域原点从一个像素向另一个像素移动, 对邻域中的像素应用算子 T , 并在该位置产生输出。这样, 对于任意指定的位置 (x, y) , 输出图像 g 在这些坐标处的值就等于对 f 中以 (x, y) 为原点的邻域应用算子 T 的结果。例如, 假设该邻域是大小为 3×3 的正方形, 算子 T 定义为“计算该邻域的平均灰度”。考虑图像中的任意位置, 譬如 $(100, 150)$ 。假设该邻域的原点位于其中心处, 则在该位置的结果 $g(100, 150)$ 是计算 $f(100, 150)$ 和它的 8 个邻点的和, 再除以 9 (即由邻域包围的像素灰度的平均值)。然后, 邻域的原点移动到下一个位置, 并重复前面的过程, 产生下一个输出图像 g 的值。

典型地, 该处理从输入图像的左上角开始, 以水平扫描的方式逐像素地处理, 每次一行。当该邻域的原点位于图像的边界上时, 部分邻域将位于图像的外部。此时, 不是在用 T 做指定的计算时忽略外侧邻点, 就是用 0 或其他指定的灰度值填充图像的边缘。被填充边界的厚度取决于邻域的大小。在 3.4.1 节中, 我们将再回到这一问题。

就像我们在 3.4 节中详细讨论的那样, 刚刚描述的过程称为空间滤波, 其中, 邻域与预定义的操作一起称为空间滤波器 (也称为空间掩模、核、模板或窗口)。在邻域中执行的操作类型决定了滤波处理的特性。

最小邻域的大小为 1×1 。在这种情况下, g 仅取决于点 (x, y) 处的 f 值, 而式 (3.1-1) 中的 T 则成为一个形如下式的灰度 (也称为灰度级或映射) 变换函数:

$$s = T(r) \quad (3.1-2)$$

其中, 为表达方便, 令 r 和 s 分别表示变量, 即 g 和 f 在任意点 (x, y) 处的灰度。例如, 如果 $T(r)$ 有如图 3.2(a) 所示的形式, 对 f 中每一个像素施以变换产生相应的 g 的像素的效果将比原始图像有更高的对比度, 即低于 k 的灰度级更暗, 而高于 k 的灰度级更亮。这种技术有时称为对比度拉伸 (见 3.2.4 节), 在该技术中, 低于 k 的 r 值被变换函数压缩在一个较窄的范围 s 内, 接近黑色; 而高于 k 的 r 值则与此相反。很明显, 灰度值 r_0 经映射得到了相应的值 s_0 。在如图 3.2(b) 所示的极限情况下, $T(r)$ 产生了一幅两级 (二值) 图像。这种形式的映射称为阈值处理函数。有些相当简单但功能强大的处理方法, 可以使用灰度变换函数用公式加以表达。在这一章中, 我们主要使用灰度变换函数来进行图像增强。在第 10 章中, 我们将使用灰度变换函数来进行图像分割。其结果仅取决于一个点处的灰度的方法有时称为点处理技术, 与此相反, 本节早些时候讨论的方法则称为邻域处理技术。

3.1.2 关于本章中的例子

虽然灰度变换和空间滤波覆盖了相当宽的应用范围, 但本章中的多数例子是图像增强应用。增强处理是对图像进行加工, 使其结果对于特定的应用比原始图像更合适的一种处理。“特定”一词在这里很重要, 它一开始就确定增强技术是面向问题的。例如, 对于增强 X 射线图像非常有用的方法, 可能并不是增强由电磁波谱中远红外波段拍摄的图像的最好方法。图像增强没有通用的“理论”。当为视觉解释而处理一幅图像时, 观察者将是判定一种特定方法好与坏的最终裁判员。在处理机器感知

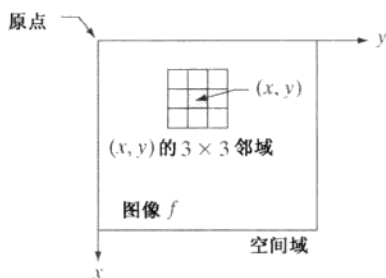


图 3.1 空间域一幅图像中关于点 (x, y) 的一个 3×3 邻域。邻域在图像中从一个像素到另一个像素移动来生成一幅输出图像

时，一种给定的技术很易于量化。例如，在自动字符识别系统中，最合适的增强方法就是可得到最好识别率的方法，这里不考虑一种方法较另一种方法的计算量的要求。

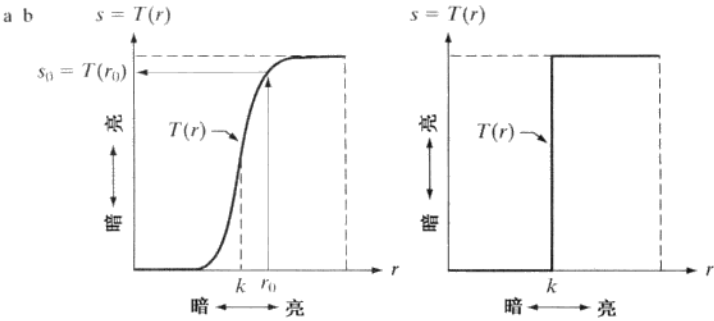


图 3.2 灰度变换函数：(a) 对比度拉伸函数；(b) 阈值处理函数

然而，不管应用或使用过的方法，图像增强是视觉上最具吸引力的图像处理领域之一。理所当然地，图像处理的初学者通常会寻找重要的且理解起来相对简单的增强应用。因此，使用图像增强的例子来说明本章中论述的空间处理方法，不仅可以节省本书中处理图像增强的额外的章节，而且更重要的是对初学者介绍空间域处理技术的细节的更有效方法。正如您将看到的那样，随着本书的进程，本章叙述的基本内容可用于比图像增强宽得多的范围。

3.2 一些基本的灰度变换函数

灰度变换是所有图像处理技术中最简单的技术。 r 和 s 分别代表处理前后的像素值。如前一节指出的那样，这些值与 $s = T(r)$ 表达式的形式有关，其中 T 是把像素值 r 映射到像素值 s 的一种变换。由于我们处理的是数字量，所以变换函数的值通常存储在一个一维阵列中，且从 r 到 s 的映射是通过查找表实现的。对于 8 比特环境，包含 T 的值的一个查找表将有 256 条记录。

作为关于灰度变换的介绍，考虑图 3.3，该图显示了图像增强常用的三类基本函数：线性函数(反转和恒等变换)、对数函数(对数和反对数变换)和幂律函数(n 次幂和 n 次根变换)。恒等函数是最一般的情况，其输出灰度等于输入灰度的变换，在图 3.3 中包括它仅仅为了完整性考虑。

3.2.1 图像反转

使用图 3.3 中所示的反转变换，可得到灰度级范围为 $[0, L-1]$ 的一幅图像的反转图像，该反转图像由下式给出：

$$s = L-1-r \tag{3.2-1}$$

使用这种方式反转一幅图像的灰度级，可得到等效的照片底片。这种类型的处理特别适用于增强嵌入在一幅图像的暗区域中的白色或灰色细节，特别是当黑色面积在尺寸上占主导地位时。图 3.4 显示了一个例子。原图像是一幅数字乳房 X 射线照片，其中显示有一小块病变。尽管事实上两幅图在视觉内容上都一样，但应注意，在这种特殊情况下，分析乳房组织时使用反转图像会容易得多。

3.2.2 对数变换

图3.3中的对数变换的通用形式为

$$s = c \log(1+r) \tag{3.2-2}$$

128
~
130

其中 c 是一个常数, 并假设 $r \geq 0$ 。图 3.3 中对数曲线的形状表明, 该变换将输入中范围较窄的低灰度值映射为输出中较宽范围的灰度值, 相反地, 对高的输入灰度值也是如此。我们使用这种类型的变换来扩展图像中的暗像素的值, 同时压缩更高灰度级的值。反对数变换的作用与此相反。

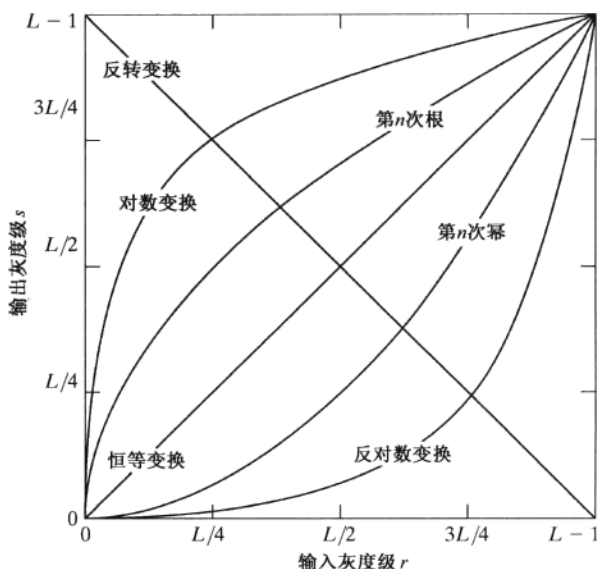


图 3.3 一些基本的灰度变换函数。所有曲线已被缩放到适合显示的范围

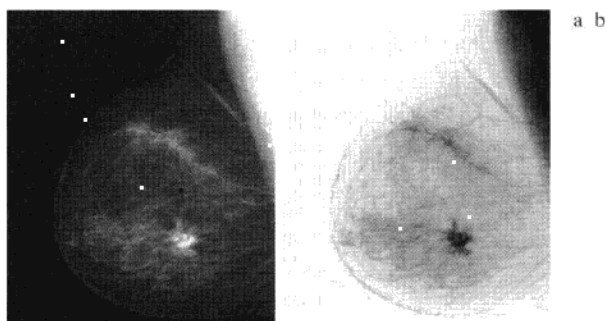


图 3.4 (a) 原始数字乳房 X 射线照片; (b) 使用式 (3.2-1) 给出的反转变换得到的反转图像 (图像由 G. E. Medical Systems 公司提供)

具有图 3.3 所示对数函数的一般形状的任何曲线, 都能完成图像灰度级的扩展/压缩, 但是, 下一节讨论的幂律变换对于这个目更为通用。对数函数有个重要特征, 即它压缩像素值变化较大的图像的动态范围。像素值有较大动态范围的一个典型应用说明是傅里叶频谱, 这将在第 4 章中讨论。现在, 我们只关注图像的频谱特征。通常, 频谱值的范围从 0 到 10^6 , 甚至更高。尽管计算机能毫无问题地处理这一范围的数字, 但图像的显示系统通常不能如实地再现如此大范围的灰度值。因而, 最终结果是许多重要的灰度细节在典型的傅里叶频谱的显示中丢失了。

作为对数变换的说明, 图 3.5(a) 显示了值域为 $0 \sim 1.5 \times 10^6$ 的傅里叶频谱。当这些值在一个 8 比特系统中被线性地缩放显示时, 最亮的像素将支配该显示, 频谱中的低值 (恰恰是重要的) 将损失掉。图 3.5(a) 中相对较小的图像区域, 鲜明地体现了这种支配性的效果, 而作为黑色则观察不到。替代这种显示数值的方法, 如果我们先对这些频谱值应用式 (3.3-2) (此时 $c=1$), 那么得到的值的范围就变为

0~6.2。图3.5(b)显示了线性地缩放这个新值域并在同一个8比特显示系统中显示频谱的结果。由这些图片可以看出,与未改进显示的频谱相比,这幅图像中可见细节的丰富程度是很显然的。我们在关于图像处理的出版物中所看到的绝大多数傅里叶频谱都用这种方式标定过。

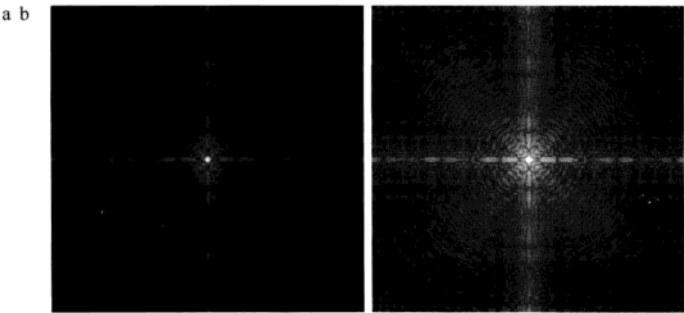


图3.5 (a)傅里叶频谱; (b)应用式(3.2-2)中的对数变换($c=1$)的结果

3.2.3 幂律(伽马)变换

幂律变换的基本形式为

$$s = cr^\gamma \tag{3.2-3}$$

其中 c 和 γ 为正常数。有时考虑到偏移量(即输入为0时的一个可度量输出),式(3.2-3)也写为 $s = c(r+\epsilon)^\gamma$ 。然而,偏移量一般是显示标定问题,因而作为一个结果,通常在式(3.2-3)中忽略不计。对于不同的 γ 值, s 与 r 的关系曲线如图3.6所示。与对数变换的情况类似,部分 γ 值的幂律曲线将较窄范围的暗色输入值映射为较宽范围的输出值,相反地,对于输入高灰度级值时也成立。然而,与对数函数不同的是,我们注意到,随着 γ 值的变化,将简单地得到一族可能的变换曲线。正如所预期的那样,在图3.6中,我们看到, $\gamma > 1$ 的值所生成的曲线和 $\gamma < 1$ 的值所生成的曲线的效果完全相反。最后,我们注意到式(3.2-3)在 $c = \gamma = 1$ 时简化成了恒等变换。

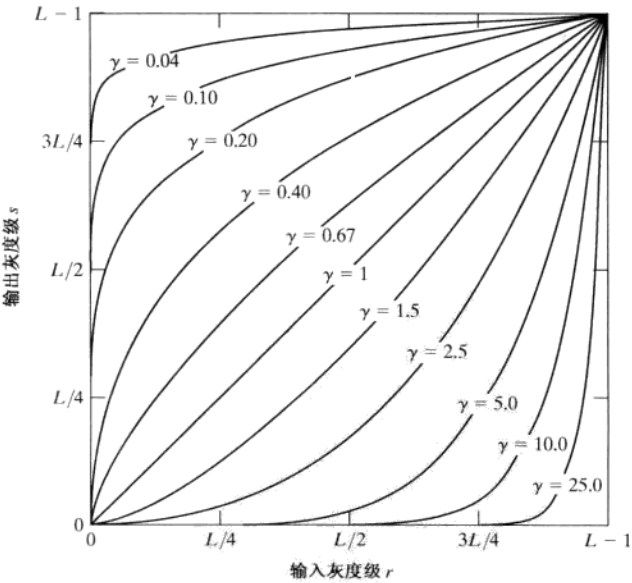


图3.6 不同 γ 值的 $s = cr^\gamma$ 曲线(所有情况 $c=1$)。所有曲线均已被缩放到适合于显示的范围

用于图像获取、打印和显示的各种设备根据幂律来产生响应。习惯上，幂律方程中的指数称为伽马 [故在式 (3.2-3) 中使用这一符号]。用于校正这些幂律响应现象的处理称为伽马校正。例如，阴极射线管 (CRT) 设备有一个灰度-电压响应，该响应是一个指数变化范围约为 1.8 ~ 2.5 的幂函数。在图 3.6 中，用 $\gamma = 2.5$ 时的参考曲线，我们看到，这种显示系统产生的图像往往要比期望的图像暗。这个结果在图 3.7 加以说明。图 3.7(a) 显示了一幅输入到监视器的简单灰度斜坡 (渐变) 图像。如期望的那样，监视器表现了输出比输入暗，如图 3.7(b) 所示。在这种情况下，伽马校正很简单。我们需要做的只是将图像输入到监视器前进行预处理，即进行 $s = r^{1/2.5} = r^{0.4}$ 变换。结果如图 3.7(c) 所示。当输入到相同的监视器时，这一伽马校正过的输入产生外观上接近于原图像的输出，如图 3.7(d) 所示。类似的分析也适用于其他图像设备，如扫描仪和打印机。唯一的不同是随设备而定的伽马值 (Poynton[1996])。

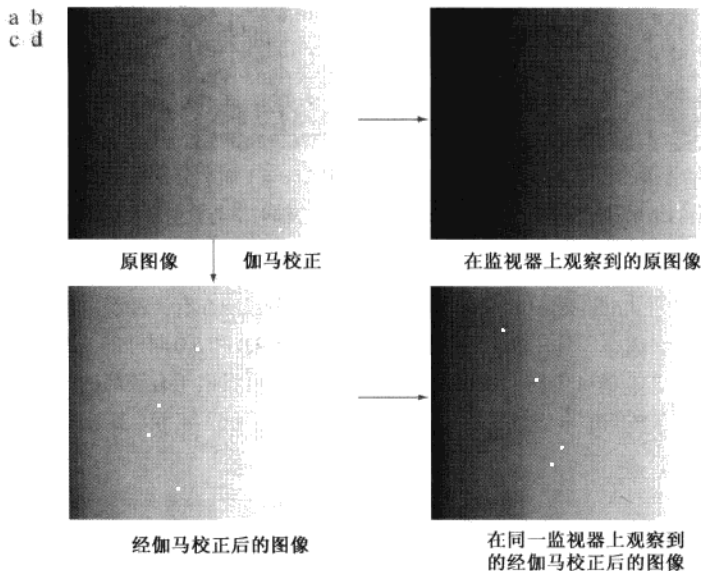


图 3.7 (a) 亮度斜坡图像; (b) 具有伽马值为 2.5 的模拟监视器上观察到的图像; (c) 经伽马校正后的图像; (d) 在同一监视器上观察到的经伽马校正后的图像。比较图 (d) 和图 (a)

如果所关注的是在计算机屏幕上精确显示图像，则伽马校正是很重要的。不恰当校正的图像看起来不是太亮，就是太暗。试图精确再现彩色也需要伽马校正的一些知识，因为改变伽马值不仅会改变亮度，而且会改变彩色图像中红、绿、蓝的比率。随着数字图像在互联网上商业应用的增多，在过去几年里，伽马校正逐渐变得越来越重要。为流行网站创建被几百万人浏览的图像是很平常的事，因为大多数浏览者会有不同的监视器和/或监视器设置。有些计算机系统甚至会内置部分伽马校正。此外，目前的图像标准并不包含创建图像的伽马值，因此，问题进一步复杂化了。由于这些限制，当在网站中存储图像时，一种合理的方法是用伽马值对图像进行预处理，此伽马值代表了在开放的市场中，在任意给定时间点，各种型号的监视器和计算机系统所期望的“平均值”。

例 3.1 使用幂律变换进行对比度增强。

除伽马校正外，幂律变换在通用对比度操作中也很有用。图 3.8(a) 显示了人体胸部以上脊椎骨折错位和脊髓受到影响的一幅核磁共振 (MRI) 图像。在胸椎垂直中心附近，即图中从上往下约 1/4 处，骨折显而易见。由于所给图像整体偏暗，因而需要扩展灰度级。这可以使用指数为分数的幂律变换来完成。使用式 (3.2-3) 给出的幂律变换来处理图 3.8(a)，得到示于图中的其他几幅图像。对应于图 (b) 到图 (d) 的伽马值

分别为 0.6, 0.4 和 0.3(c 始终为 1)。我们注意到, 随着伽马值从 0.6 减小到 0.4, 更多的细节变得可见了。当伽马值进一步减小到 0.3 时, 背景中的细节得到了进一步增强, 但对比度会降低到图像开始有轻微“冲淡”外观的那一点, 尤其是在背景中。比较所有的结果, 我们看到在对比度和可辨别细节方面的最好增强在 $\gamma = 0.4$ 时。在这幅特定的图像中, $\gamma = 0.3$ 的值是一个近似极限点, 低于该值对比度会下降到令人难以接受的水平。



图 3.8 (a) 人体脊椎骨折的核磁共振图像(MRI); (b)~(d) 令 $c = 1$ 而 γ 分别等于 0.6, 0.4, 0.3 时应用式 (3.2-3) 给出的变换的结果(原图像由 Vanderbilt 大学医学中心辐射学与放射学系的 David R. Pickens 博士提供)

例 3.2 幂律变换的另一个说明。

图 3.9(a) 显示了一个与图 3.8(a) 相反的问题。要处理的图像现在有“冲淡”的外观, 这表明灰度级的压缩是必需的。这可以用式 (3.2-3) 并令 $\gamma > 1$ 来完成。令 $\gamma = 3.0, 4.0$ 和 5.0 时, 图 3.9(a) 的处理结果如图 3.9(b) 到 (d) 所示。伽马值取 3.0 和 4.0 时, 可得到合适的结果, 且后者由于有较高的对比度而显示出更令人满意的效果。 $\gamma = 5.0$ 时得到的结果中有些地方太暗, 因而丢失了一些细节, 如左上方主路左侧的暗色区域就是这样的一个例子。

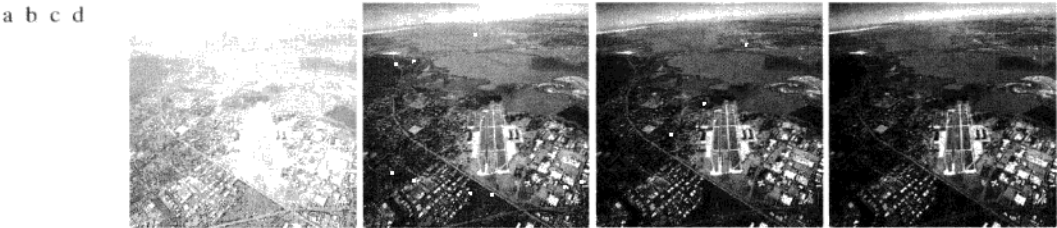


图 3.9 (a) 航拍图像; (b)~(d) 令 $c = 1$ 且 γ 分别等于 3.0, 4.0 和 5.0 时应用式 (3.2-3) 给出的变换的结果(此例的原图像由 NASA 提供)

3.2.4 分段线性变换函数

对前面三节中所讨论方法的一个补充方法是使用分段线性函数。分段线性函数较我们已经讨论过的函数类型的主要优点是分段线性函数的形式可以是任意复杂的。事实上, 正如您马上将要看到的那样, 一些重要变换的实际实现可仅由分段函数来明确地表达。分段函数的主要缺点是它的技术说明要求用户输入。

对比度拉伸

最简单的分段线性函数之一是对比度拉伸变换。低对比度图像可由照明不足、成像传感器动态范围太小, 甚至在图像获取过程中镜头光圈设置错误引起。对比度拉伸是扩展图像灰度级动态范围的处理, 因此, 它可以跨越记录介质和显示装置的全部灰度范围。

135
~
137

图 3.10(a) 显示了一个用于对比度拉伸的典型变换。点 (r_1, s_1) 和点 (r_2, s_2) 的位置控制变换函数的形状。如果 $r_1 = s_1$ 且 $r_2 = s_2$ ，则变换为一线性函数，将产生一个没有变化的灰度级。若 $r_1 = r_2, s_1 = 0$ 且 $s_2 = L-1$ ，则变换变为阈值处理函数，并产生一幅二值图像，如图 3.2(b) 所示。 (r_1, s_1) 和 (r_2, s_2) 的中间值产生输出图像的不同程度的灰度级扩展，从而来影响输出图像的对比度。一般情况下，假设 $r_1 \leq r_2$ 且 $s_1 \leq s_2$ ，函数是单值的且单调递增的。这一条件保持了灰度级的次序，从而避免了在处理后的图像中产生人为的灰度错误。

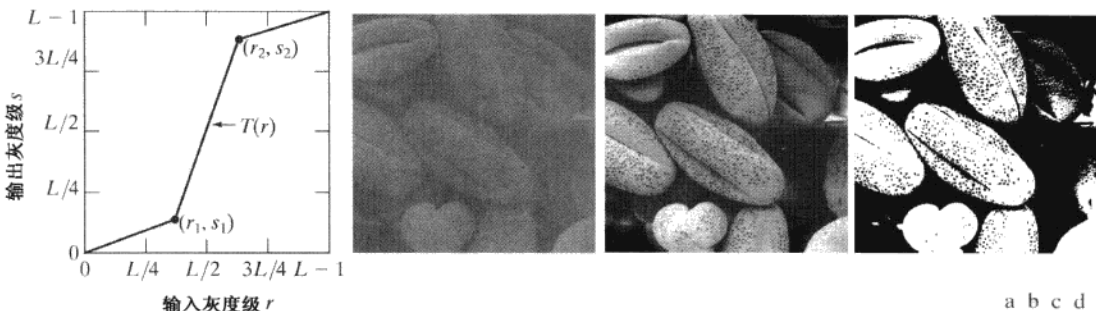


图 3.10 对比度拉伸：(a)变换函数的形式；(b)低对比度图像；(c)对比度拉伸的结果；(d)阈值处理的结果(原图像由位于堪培拉的澳大利亚国立大学生物科学研究院的 Roger Heady 博士提供)

图 3.10(b) 显示了一幅 8 比特低对比度图像。图 3.10(c) 显示了对比拉伸后的效果，得到该效果的参数设置如下： $(r_1, s_1) = (r_{\min}, 0)$ 且 $(r_2, s_2) = (r_{\max}, L-1)$ ，其中 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 分别表示图像中的最小灰度级和最大灰度级。因此，变换函数把灰度级由其原范围线性地拉伸至整个范围 $[0, L-1]$ 。最后，图 3.10(d) 显示了使用前面定义的 $(r_1, s_1) = (m, 0)$ 和 $(r_2, s_2) = (m, L-1)$ 的阈值处理函数后的结果，其中， m 是图像的平均灰度级。作为这些结果的基础的原图像是电子显微镜扫描的放大约 700 倍的花粉图像。

灰度级分层

突出图像中特定灰度范围的亮度通常是重要的，其应用包括增强特征，如卫星图像中大量的水和 X 射线图像中的缺陷。通常称之为灰度级分层的处理可以有许多方法实现，但是它们中的大多数是两种基本方法的变形。一种方法是将感兴趣范围内的所有灰度值显示为一个值(譬如“白色”)，而将其其他灰度值显示为另一个值(譬如“黑色”)。如图 3.11(a) 所示，该变换产生了一幅二值图像。第二种方法以图 3.11(b) 所示的变换为基础，使感兴趣范围的灰度变亮(或变暗)，而保持图像中的其他灰度级不变。

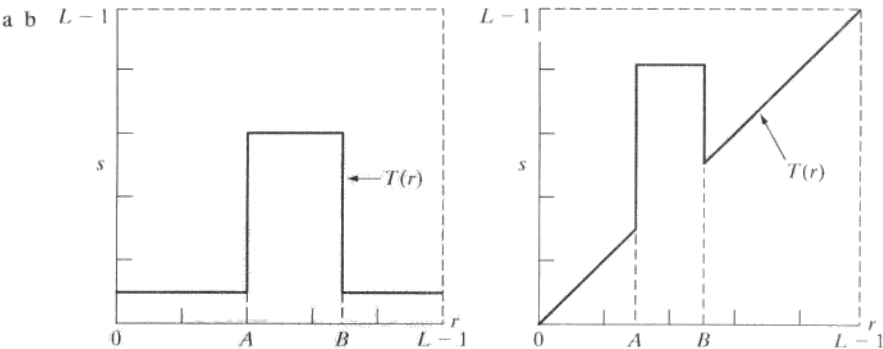


图 3.11 (a) 这一变换突出了范围 $[A, B]$ 内的灰度，而将所有其他灰度降低到了一个更低的级别；(b) 这一变换突出了范围 $[A, B]$ 内的灰度，而保持所有其他灰度级不变

例 3.3 灰度级分层。

图 3.12(a) 是一幅靠近肾脏区域的大动脉血管造影照片(见 1.3.2 节对这幅图像更详细的解释)。该例的目的是使用灰度级分层来突出主要血管, 使其更亮一些, 如同注射造影剂的效果那样。图 3.12(b) 显示了使用图 3.11(a) 给出的变换的结果, 所选范围接近数值的顶端, 因为感兴趣的范围比背景亮。该变换的最终结果是血管和肾脏部分显现白色, 而其他灰度显示为黑色。这种类型的增强产生了一幅二值图像, 这对于研究(用于检测血管堵塞的)造影剂的流动是很有用的。

另一方面, 如果我们的兴趣在于研究感兴趣区域的实际灰度值, 则可使用图 3.11(b) 中的变换。图 3.12(c) 显示了使用这样一个变换后的结果: 近似等于平均灰度的中等灰度区域的灰度范围设置为黑色, 而其他灰度保持不变。这里, 我们看到主血管和肾脏区域部分的灰度级色调保持不变。当我们的兴趣是测量系列图像中造影剂随时间流动时, 这种结果是很有用的。



图 3.12 (a) 大动脉血管造影照片; (b) 使用图 3.11(a) 中说明的分层变换的结果, 所选的重要灰度范围为灰度级的高端; (c) 使用图 3.11(b) 中的变换的结果, 所选区域置为黑色, 以便血管和肾脏区域的灰度保持不变(原图像由密歇根大学医学院的 Thomas R. Gest 博士提供)

比特平面分层

像素是由比特组成的数字。例如, 在 256 级灰度图像中, 每个像素的灰度是由 8 比特(也就是 1 个字节)组成的。代替突出灰度级范围, 我们可突出特定比特来为整个图像外观作出贡献。如图 3.13 说明的那样, 一幅 8 比特图像可考虑为由 8 个 1 比特平面组成, 其中平面 1 包含图像中所有像素的最低阶比特, 而平面 8 包含图像中所有像素的最高阶比特。

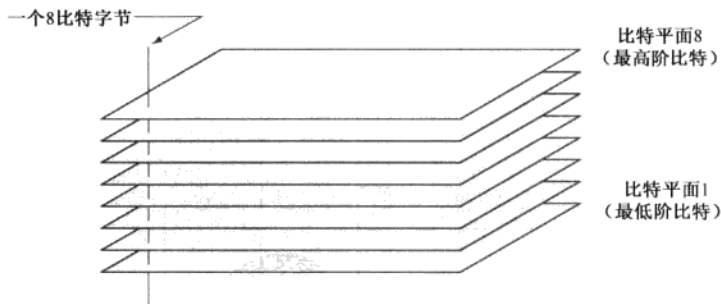


图 3.13 一幅 8 比特图像的比特平面表示

图 3.14(a) 显示了一幅 8 比特灰度图像, 图 3.14(b) 到图 3.14(i) 是其 8 个 1 比特平面, 图 3.14(b) 对应于最低阶比特。很明显, 4 个高阶比特平面, 特别是最后两个比特平面, 包含了在视觉上很重要的大多数数据。低阶比特平面在图像中贡献了更精细的灰度细节。原图像有一个灰度为 194 的灰色边。注意, 对应于某些比特平面的灰度边界是黑色(0), 而其他灰度边界是白色(1)。为了解其原因, 考虑

一个像素,譬如,图3.14(a)的最低边界的中部。从最高阶平面开始,这些比特平面中的相应像素的值分别为11000010,它是十进制数194的二进制表示。原图像中任意一个像素的值,可以类似地由这些比特平面中对应的二进制像素值来重建。

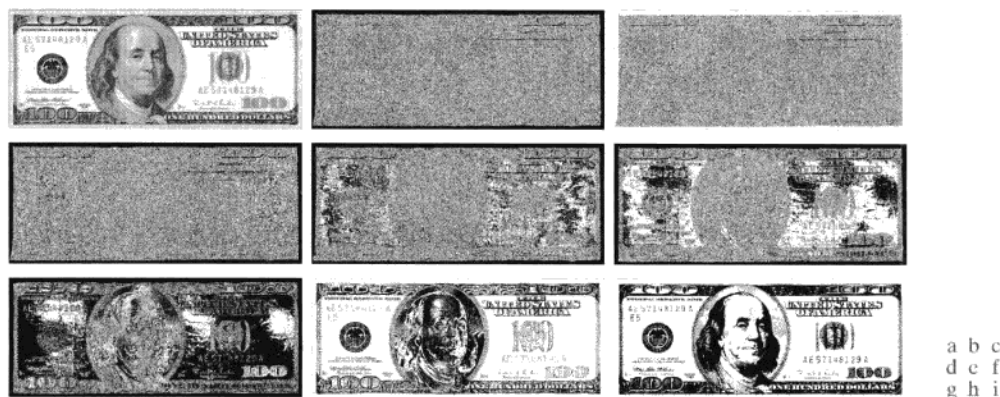


图3.14 一幅大小为500×1192像素的8比特灰度图像;(b)~(i)比特平面1到8,其中比特平面1对应于最低阶比特。每个比特平面都是一幅二值图像

根据灰度变换函数,显示一幅8比特图像的第8个比特平面并不困难,它可用阈值灰度变换函数处理输入图像得到二值图像,该函数将0~127之间的所有灰度映射为0,而将128~255之间的所有灰度映射为1。图3.14(i)中的二值图像就是使用这种方式得到的。得到生成其他比特平面的灰度变换函数的方法,将作为一个练习留给读者(见习题3.4)。

把一幅图像分解为比特平面,对于分析图像中每个比特的相对重要性是很有用的,这一处理可帮助我们确定用于量化该图像的比特数的充分性。此外,这种类型的分解对图像压缩(第8章的主题)也很有用,在图像压缩中,重建一幅图像时所用的平面要比全部平面少。例如,图3.15(a)显示了使用比特平面8和比特平面7重建的一幅图像。重建是使用第 n 个平面的像素乘以常数 2^{n-1} 来完成的。与把第 n 个有意义的二进制比特变换成十进制相比,这并没有做更多的事。所用的每个比特平面与一个相应的常数相乘,然后将所有的比特平面相加得到灰度图像。这样,为得到图3.15(a),我们用128乘以比特平面8,用64乘以比特平面7,然后把这两个比特平面相加。虽然原图像的主要特征被复原了,但重建后的图像显得有些平淡,特别是在背景区域。这并不奇怪,因为两个平面仅能产生4个不同的灰度级。把平面6加入到重建中可改善这种情况,如图3.15(b)所示。注意,该图像的背景有可感知的伪轮廓。这一效应可通过在重建中加入第5个平面来显著降低,如图3.15(c)所示。在重建中使用更多的平面对图像的外观不会有更大的贡献。因而,我们可以得出这样的结论:存储4个高阶比特平面将允许我们以可接受的细节来重建原图像。存储这4个平面代替原始图像可减少50%的存储量(不考虑存储体系结构问题)。



图3.15 (a)使用比特平面8和7重建的图像;(b)使用比特平面8,7和6重建的图像;(c)使用比特平面8,7,6和5重建的图像。将图(c)与图3.14(a)进行比较

3.3 直方图处理

灰度级范围为 $[0, L-1]$ 的数字图像的直方图是离散函数 $h(r_k) = n_k$, 其中 r_k 是第 k 级灰度值, n_k 是图像中灰度为 r_k 的像素个数。在实践中, 经常用乘积 MN 表示的图像像素的总数除它的每个分量来归一化直方图, 通常 M 和 N 是图像的行和列的维数。因此, 归一化后的直方图由 $p(r_k) = n_k / MN$ 给出, 其中 $k = 0, 1, \dots, L-1$ 。简单地说, $p(r_k)$ 是灰度级 r_k 在图像中出现的概率的一个估计。归一化直方图的所有分量之和应等于1。

 关于基本概率论的简要回顾, 请读者参阅本书的网站。

直方图是多种空间域处理技术的基础。直方图操作可用于图像增强, 如本节所示。除了提供有用的图像统计资料外, 在后续章节中我们还会看到直方图中的固有信息在其他图像处理应用中也非常有用, 如图像压缩与分割。直方图在软件中计算简单, 而且有助于商用硬件实现, 因此已成为实时图像处理的一种流行工具。

作为灰度变换的直方图处理的介绍, 我们考虑图 3.16, 它是图 3.10 所示的以 4 个基本灰度级为特征的花粉图像: 暗图像、亮图像、低对比度图像和高对比度图像。图的右侧显示了与这些图像对应的直方图。每个直方图的水平轴对应于灰度值 r_k , 垂直轴对应于值 $h(r_k) = n_k$ 或归一化后的值 $p(r_k) = n_k / MN$ 。这样, 直方图就可以简单地被看成是 $h(r_k) = n_k$ 对应于 r_k 或 $p(r_k) = n_k / MN$ 对应于 r_k 的图形。

我们注意到, 在暗图像中, 直方图的分量集中在灰度级的低(暗)端。类似地, 亮图像直方图的分量则倾向于灰度级的高端。低对比度图像具有较窄的直方图, 且集中于灰度级的中部。对于单色图像, 这意味着暗淡, 好像灰度被冲淡了一样。最后, 我们看到, 高对比度图像中直方图的分量覆盖了很宽的灰度级范围, 而且像素的分布没有太不均匀, 只有少量垂线比其他的高许多。直观上, 可以得出这样的结论: 若一幅图像的像素倾向于占据整个可能的灰度级并且分布均匀, 则该图像会有高对比度的外观并展示灰色调的较大变化。最终效果将是一幅灰度细节丰富且动态范围较大的图像。很快将会证明, 仅仅依靠输入图像直方图中的可用信息就可开发出一个变换函数来自动地实现这种效果。

3.3.1 直方图均衡

考虑连续灰度值, 并用变量 r 表示待处理图像的灰度。通常, 我们假设 r 的取值区间为 $[0, L-1]$, 且 $r=0$ 表示黑色, $r=L-1$ 表示白色。在 r 满足这些条件的情况下, 我们将注意力集中在变换形式

$$s = T(r), 0 \leq r \leq L-1 \quad (3.3-1)$$

上(灰度映射), 对于输入图像中每个具有 r 值的像素值产生一个输出灰度值 s 。我们假设

- (a) $T(r)$ 在区间 $0 \leq r \leq L-1$ 上为单调递增函数^①。
- (b) 当 $0 \leq r \leq L-1$ 时, $0 \leq T(r) \leq L-1$ 。

在稍后讨论的一些公式中, 我们用反函数

$$r = T^{-1}(s), 0 \leq s \leq L-1 \quad (3.3-2)$$

在这种情况下, 条件(a)改为

- (a') $T(r)$ 在区间 $0 \leq r \leq L-1$ 上是一个严格单调递增函数。

^① 如果对于 $r_2 > r_1$ 有 $T(r_2) \geq T(r_1)$, 则称函数 $T(r)$ 是单调递增的。如果对于 $r_2 > r_1$ 有 $T(r_2) > T(r_1)$, 则称函数 $T(r)$ 是严格单调递增的。类似的定义适用于单调递减函数。

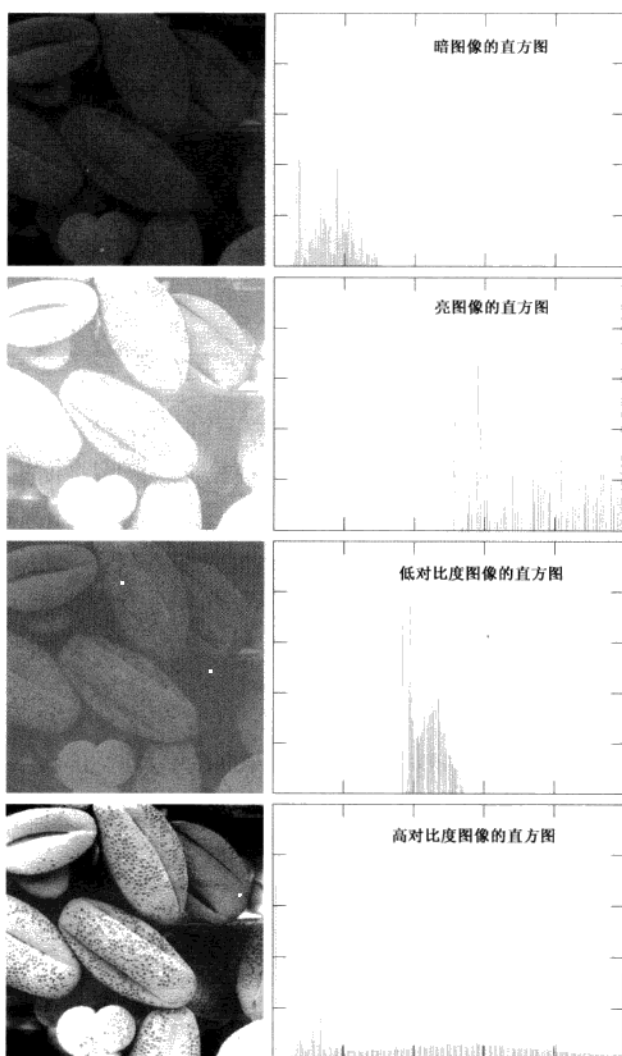


图 3.16 4 种基本的图像类型：暗图像、亮图像、低对比度图像和高对比度图像，以及与它们相对应的直方图

条件(a)中要求 $T(r)$ 为单调递增函数是为了保证输出灰度值不少于相应的输入值，防止灰度反变换时产生人为缺陷。条件(b)保证输出灰度的范围与输入灰度的范围相同。最后，条件(a')保证从 s 到 r 的反映射是一对一的，防止出现二义性。图3.17(a)显示了满足条件(a)和(b)的一个变换函数。在这里我们看到，多值映射到单值是可能的，并且仍然满足这两个条件。也就是说，单调变换函数执行一对一或多对一映射。当从 r 到 s 映射时，这是很完美的。然而，如果我们想要唯一地从映射的值恢复 r 值(反映射由反向箭头表示)，图3.17(a)就存在一个问题。图3.17(a)中 s_k 的反映射是可能的，但是， s_q 的反映射是一个范围的值，通常，要防止由 s_q 恢复原始的 r 值的问题。如图3.17(b)所示， $T(r)$ 要求是严格单调的，以保证反映射是单值的(即两个方向上的映射都是一对一的)。这是我们在本章后面推导一些重要直方图处理技术的理论要求。因为在实践中我们处理的是整数灰度值，必须把所有结果四舍五入为最接近的整数值。因此，当严格单调不满足时，我们就要使用寻找最接近整数匹配的方法来解决非唯一反变换的问题。例3.8对此给出了说明。

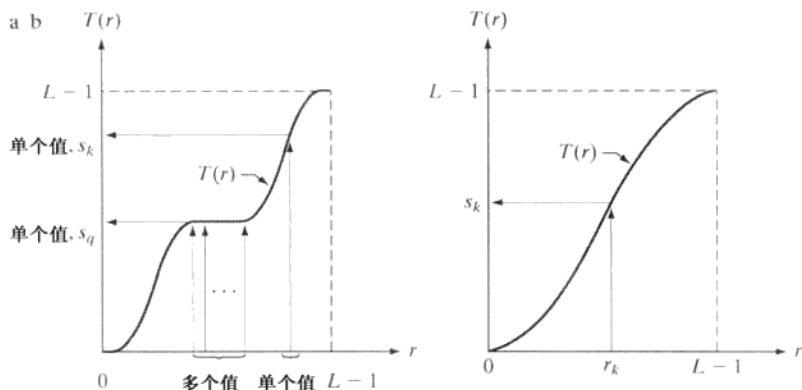


图 3.17 (a)非单调递增函数,显示了将多个值映射为单个值的方式; (b)严格单调递增函数。这是一个双向的——映射

一幅图像的灰度级可看成是区间\$[0, L-1]\$内的随机变量。随机变量的基本描绘子是其概率密度函数(PDF)。令 \$p_r(r)\$ 和 \$p_s(s)\$ 分别表示随机变量 \$r\$ 和 \$s\$ 的概率密度函数, 其中 \$p\$ 的下标用于指示 \$p_r\$ 和 \$p_s\$ 是不同的函数。由基本概率论得到的一个基本结果是, 如果 \$p_r(r)\$ 和 \$T(r)\$ 已知, 且在感兴趣的值域上 \$T(r)\$ 是连续且可微的, 则变换(映射)后的变量 \$s\$ 的 PDF 可由下面的简单公式得到:

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (3.3-3)$$

这样, 我们看到, 输出灰度变量 \$s\$ 的 PDF 就由输入灰度的 PDF 和所用的变换函数决定 [回忆可知 \$r\$ 和 \$s\$ 由 \$T(r)\$ 关联起来]。

在图像处理中特别重要的变换函数有如下形式:

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw \quad (3.3-4)$$

其中, \$w\$ 是积分的假变量。公式右边是随机变量 \$r\$ 的累积分布函数(CDF)。因为 PDF 总为正, 回忆一下, 一个函数的积分是该函数下方的面积, 遵循式(3.3-4)的变换函数满足条件(a), 因为函数下的面积不随 \$r\$ 的增大而减小。当在该等式中上限是 \$r = (L-1)\$ 时, 则积分值等于 1 (PDF 曲线下方的面积总是 1), 所以 \$s\$ 的最大值是 \$(L-1)\$, 并且条件(b)也是满足的。

为寻找刚才讨论的相应变换的 \$p_s(s)\$, 我们使用式(3.3-3)。我们由基本积分学中的莱布尼茨准则知道, 关于上限的定积分的导数是被积函数在该上限的值, 即

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = (L-1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w) dw \right] = (L-1) p_r(r) \quad (3.3-5)$$

把 \$dr/ds\$ 的这个结果代入式(3.3-3), 并记住概率密度值为正, 得到

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = p_r(r) \left| \frac{1}{(L-1)p_r(r)} \right| = \frac{1}{L-1}, \quad 0 \leq s \leq L-1 \quad (3.3-6)$$

从该公式的最后一行中的 \$p_s(s)\$ 可知, 这是一个均匀概率密度函数。简而言之, 我们已证明执行式(3.3-4)的灰度变换将得到一个随机变量 \$s\$, 该随机变量由一个均匀 PDF 表征。特别要注意, 由该式可知 \$T(r)\$ 取决于 \$p_r(r)\$, 但正如式(3.3-6)所指出的那样, 得到的 \$p_s(s)\$ 始终是均匀的, 它与 \$p_r(r)\$ 的形式无关。图3.18 说明了这些概念。

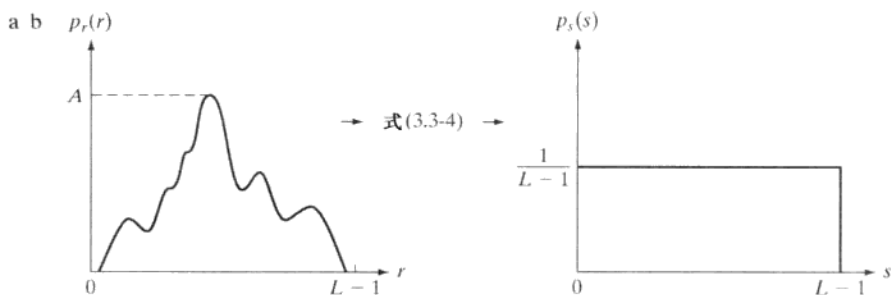


图 3.18 (a) 一个任意的 PDF; (b) 对所有灰度级 r 应用式 (3.3-4) 中的变换的结果。具有均匀 PDF 的结果灰度 s 与 r 的 PDF 的形式无关

例 3.4 式 (3.3-4) 和式 (3.3-6) 的说明。

为牢记这一概念, 考虑下面这个简单的例子。假设图像中的 (连续) 灰度值有如下 PDF:

$$p_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{(L-1)^2}, & 0 \leq r \leq L-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从式 (3.3-4) 有

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw = \frac{2}{L-1} \int_0^r w dw = \frac{r^2}{L-1}$$

假设我们接着使用这个变换得到一幅灰度为 s 的新图像; 也就是说, s 值是通过求输入图像的相应灰度值的平方, 然后除以 $(L-1)$ 形成的。例如, 考虑一幅 $L=10$ 的图像, 并且假设输入图像中任意位置 (x, y) 处的像素有灰度 $r=3$ 。则新图像中在该位置的像素是 $s = T(r) = r^2/9 = 1$ 。我们可以把 $p_r(r)$ 代入式 (3.3-6), 并用 $s = r^2/(L-1)$ 这样的事实验证新图像中的灰度的 PDF 是均匀的, 即

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \left[\frac{ds}{dr} \right]^{-1} \right| = \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \left[\frac{d}{dr} \frac{r^2}{L-1} \right]^{-1} \right| = \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{(L-1)}{2r} \right| = \frac{1}{L-1}$$

其中, 最后一步遵循了这样一个事实, 即 r 是非负的并且假设 $L > 1$ 。正如所期望的那样, 结果是一个均匀的 PDF。

对于离散值, 我们处理其概率 (直方图值) 与求和来替代处理概率密度函数与积分^①。正如前面提到的那样, 一幅数字图像中灰度级 r_k 出现的概率近似为

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3-7)$$

其中, MN 是图像中像素的总数, n_k 是灰度为 r_k 的像素个数, L 是图像中可能的灰度级的数量 (即对 8 比特图像是 256)。正像本节开始说明的那样, 与 r_k 相对的 $p_r(r_k)$ 图形通常称为直方图。

式 (3.3-4) 中变换的离散形式为

$$s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \frac{(L-1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3-8)$$

① 先前声明的单调性条件同样适用于离散情形。我们简单地将变量的值限制为离散值。

这样，已处理的图像(即输出图像)通过式(3.3-8)将输入图像中灰度级为 r_k 的各像素映射到输出图像中灰度级为 s_k 的对应像素得到。在这个公式中，变换(映射) $T(r_k)$ 称为直方图均衡或直方图线性变换。不难证明(见习题 3.10)该变换函数满足本节前面所述的条件(a)和(b)。

例 3.5 直方图均衡的简单说明。

在继续之前，通过一个简单的例子来说明直方图均衡的工作原理是有帮助的。假设一幅大小为 64×64 像素 ($MN = 4096$) 的 3 比特图像 ($L = 8$) 的灰度分布如表 3.1 所示，其中灰度级是范围 $[0, L-1] = [0, 7]$ 中的整数。

表 3.1 大小为 64×64 像素的 3 比特数字图像的灰度分布和直方图值

r_k	n_k	$p(r_k) = n_k / MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

假设图像的直方图如图 3.19(a) 所示。直方图均衡变换函数的值使用式 (3.3-8) 得到。例如，

$$s_0 = T(r_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7 p_r(r_0) = 1.33$$

类似地，有

$$s_1 = T(r_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_r(r_j) = 7 p_r(r_0) + 7 p_r(r_1) = 3.08$$

及 $s_2 = 4.55, s_3 = 5.67, s_4 = 6.23, s_5 = 6.65, s_6 = 6.86, s_7 = 7.00$ 。该变换函数的形状为阶梯形状，如图 3.19(b) 所示。

在这一点上， s 值一直是分数，因为它们是通过求概率值的和产生的，因此我们要把它们近似为最接近的整数：

$s_0 = 1.33 \rightarrow 1$

$s_1 = 3.08 \rightarrow 3$

$s_2 = 4.55 \rightarrow 5$

$s_3 = 5.67 \rightarrow 6$

$s_4 = 6.23 \rightarrow 6$

$s_5 = 6.65 \rightarrow 7$

$s_6 = 6.86 \rightarrow 7$

$s_7 = 7.00 \rightarrow 7$

这些是均衡后的直方图的值。很明显，只有 5 个不同的灰度级。因为 $r_0 = 0$ 被映射为 $s_0 = 1$ ，在均衡后的图像中有 790 个像素具有该值(见表 3.1)。另外，在图像中有 1023 个像素取 $s_1 = 3$ 这个值，有 850 个像素取 $s_2 = 5$ 这个值。然而， r_3 和 r_4 都被映射为同一个值 6，所以在均衡后的图像中有 $(656 + 329) = 985$ 个像素取这个值。类似地，在均衡后的图像中有 $(245 + 122 + 81) = 448$ 个像素取 7 这个值。使用 $MN = 4096$ 除这些数就得到了图 3.19(c) 所示的均衡后的直方图。

因为直方图是 PDF 的近似，而且在处理中不允许造成新的灰度级，所以在实际的直方图均衡应用中，很少见到完美平坦的直方图。因此，不像连续的情况，通常不能证明离散直方图均衡会导致均匀的直方图。然而，正像您将很快看到的那样，式 (3.3-8) 具有展开输入图像直方图的趋势，均衡后的图像的灰度级跨越更宽灰度级范围。最终结果是增强了对比度。

在本节前面，讨论了具有覆盖整个灰度范围的灰度值的许多优点。除了产生有这样的趋势的灰度之外，刚才推导的方法还有一个额外的优点，即它是完全“自动的”。换句话说，给定一幅图像，

直方图均衡化的处理仅涉及执行式(3.3-8)，该式以可直接从已知图像提取的信息为基础，而不需要更多的参数说明。我们还注意到实现该技术所要求的计算的简单性。

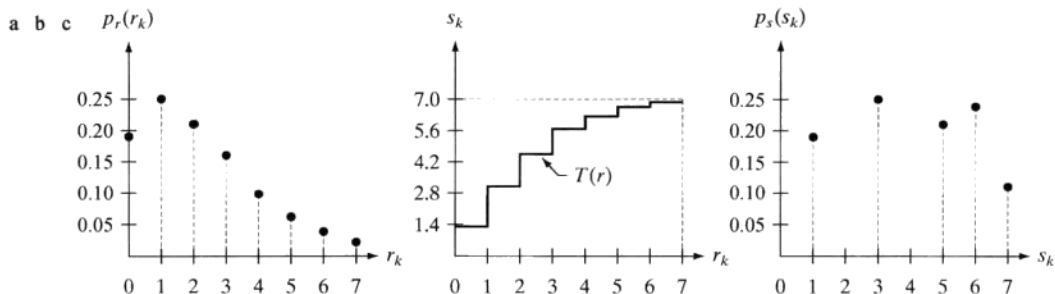


图 3.19 3 比特(8 个灰度级)图像的直方图均衡示例: (a)原始直方图; (b)变换函数; (c)均衡后的直方图

从 s 回到 r 的反变换形式表示为

$$r_k = T^{-1}(s_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3-9)$$

可以证明(见习题 3.10)，只要灰度级 $r_k, k = 0, 1, 2, \dots, L-1$ 在输入图像中一个也不缺，即图像直方图中没有哪个分量为 0，反变换就满足条件(a')和(b)。尽管反变换不用于直方图均衡，但它在下一节研究的直方图匹配方案中起核心作用。

例 3.6 直方图均衡。

图 3.20 左边一列显示了来自图 3.16 的 4 幅图像，中间一列显示了对每一幅图像执行直方图均衡后的结果。从上到下的前三种结果显示了重要的改进效果。正如所预期的那样，直方图均衡对第四幅图像未产生太大的效果，这是因为这幅图像的灰度已经扩展到了全部灰度级范围。图 3.21 显示了用于产生图 3.20 中均衡后的图像的变换函数。这些函数是使用式(3.3-8)产生的。很明显，变换(4)的形状近似为线性形状，这指出输入被映射为近似相等的输出。

图 3.20 中的第三列显示了均衡后的图像的直方图。有趣的是，尽管这些直方图不同，但直方图均衡后的图像本身在视觉上却是非常相似的。但这并非是不希望的，因为左边一列图像之间的差异仅仅是对比度上的，而不是内容上的。换句话说，因为图像有相同的内容，直方图均衡导致的对比度增强足以补偿图像在视觉上难以区分灰度级的差别。在给出原始图像间的重要对比度差别后，该例说明了直方图均衡作为自适应对比度增强工具的强大作用。

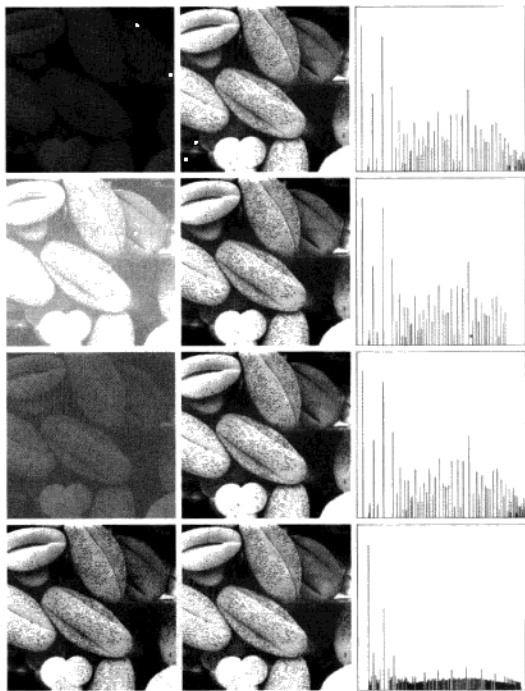


图 3.20 左边一列：来自图 3.16 的图像。
中间一列：均衡后的相应图像。右
边一列：中间一列图像的直方图

3.3.2 直方图匹配(规定化)

如前所述，直方图均衡能自动地确定变换函数，该函数寻求产生有均匀直方图的输出图像。当需要自动增强时，这是一种好方法，因为由这种技术得到的结果可以预知，并且这种方法实现起来

也很简单。我们将在本节中指出,对于某些应用,采用均匀直方图的基本增强并不是最好的方法。特别地,有时我们希望处理后的图像具有规定的直方图形状可能更有用。这种用于产生处理后有特殊直方图的方法称为直方图匹配或直方图规范化。

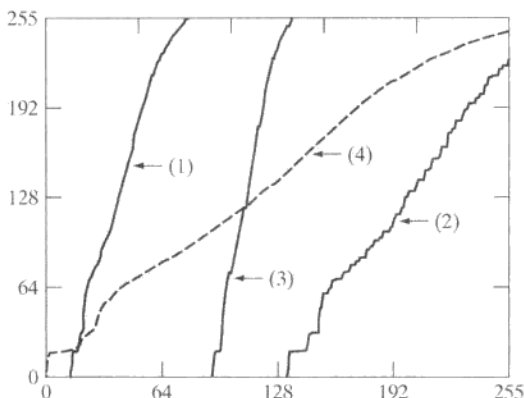


图 3.21 直方图均衡的变换函数。变换(1)到(4)是使用式(3.3-8)由图 3.20 左边一列图像(从上到下)的直方图得到的

现在我们暂时回到连续灰度 r 和 z (看成是连续随机变量), 并令 $p_r(r)$ 和 $p_z(z)$ 表示它们所对应的连续概率密度函数。在这种表示方法中, r 和 z 分别表示输入图像和输出(已处理)图像的灰度级。我们可以由给定的输入图像估计 $p_r(r)$, 而 $p_z(z)$ 是我们希望输出图像所具有的指定概率密度函数。

令 s 为一个有如下特性的随机变量:

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw \quad (3.3-10)$$

其中, 如前面一样, w 为积分假变量。我们发现这个表达式是式(3.3-4)给出的直方图均衡的连续形式。

接着, 我们定义一个有如下特性的随机变量 z :

$$G(z) = (L-1) \int_0^z p_z(t) dt = s \quad (3.3-11)$$

其中, t 为积分假变量。由这两个等式可得 $G(z) = T(r)$, 因此 z 必须满足下列条件:

$$z = G^{-1}[T(r)] = G^{-1}(s) \quad (3.3-12)$$

一旦由输入图像估计出 $p_r(r)$, 变换函数 $T(r)$ 就可由式(3.3-10)得到。类似地, 因为 $p_z(z)$ 已知, 变换函数 $G(z)$ 可由式(3.3-11)得到。

式(3.3-10)到式(3.3-12)表明, 使用下列步骤, 可由一幅给定图像得到一幅其灰度级具有指定概率密度函数的图像:

1. 由输入图像得到 $p_r(r)$, 并由式(3.3-10)求得 s 的值。
2. 使用式(3.3-11)中指定的 PDF 求得变换函数 $G(z)$ 。
3. 求得反变换函数 $z = G^{-1}(s)$; 因为 z 是由 s 得到的, 所以该处理是 s 到 z 的映射, 而后者正是我们期望的值。
4. 首先用式(3.3-10)对输入图像进行均衡得到输出图像; 该图像的像素值是 s 值。对均衡后的图像中具有 s 值的每个像素执行反映射 $z = G^{-1}(s)$, 得到输出图像中的相应像素。当所有的像素都处理完后, 输出图像的 PDF 将等于指定的 PDF。

例 3.7 直方图规定化。

假设采用连续灰度值, 并假设一幅图像的灰度 PDF 为 $p_r(r) = 2r/(L-1)^2$, $0 \leq r \leq (L-1)$, 对于其他 r 值有 $p_r(r) = 0$ 。寻找一个变换函数, 使得产生的图像的灰度 PDF 是 $p_z(z) = 3z^2/(L-1)^3$, $0 \leq z \leq (L-1)$, 而对于其他 z 值有 $p_z(z) = 0$ 。

首先, 我们对区间 $[0, L-1]$ 寻找直方图均衡变换:

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w) dw = \frac{2}{(L-1)} \int_0^r w dw = \frac{r^2}{(L-1)}$$

由定义可知, 对于范围 $[0, L-1]$ 外的值, 该变换为 0。输入灰度值的平方除以 $(L-1)^2$ 将产生一幅灰度为 s 并具有均匀 PDF 的图像, 因为这是早些时候讨论的直方图均衡变换。

我们感兴趣的是具有规定直方图的图像, 因此, 我们在 $[0, L-1]$ 区间寻找下一个直方图均衡变换:

$$G(z) = (L-1) \int_0^z p_z(w) dw = \frac{3}{(L-1)^2} \int_0^z w^2 dw = \frac{z^3}{(L-1)^2}$$

由定义可知在该区间外这个函数也为 0。最后, 我们要求 $G(z) = s$, 但 $G(z) = z^3/(L-1)^2$; 因此 $z^3/(L-1)^2 = s$, 并且有

$$z = [(L-1)^2 s]^{1/3}$$

如果我们用 $(L-1)^2$ 乘以直方图均衡过的每一个像素, 取该乘积的 $1/3$ 次幂, 结果将是一幅我们所期望的图像, 该图像在区间 $[0, L-1]$ 内 z 的灰度的 PDF 为 $p_z(z) = 3z^2/(L-1)^3$ 。

因为 $s = r^2/(L-1)$, 我们可以直接由输入图像的灰度 r 生成 z :

$$z = [(L-1)^2 s]^{1/3} = \left[(L-1)^2 \frac{r^2}{(L-1)} \right]^{1/3} = [(L-1)r^2]^{1/3}$$

这样, 原图像中每一个像素值的平方与 $(L-1)$ 相乘, 然后再取该乘积的 $1/3$ 次幂, 将得到其灰度级 z 具有规定 PDF 的图像。我们看到, 均衡输入图像的中间一步可以跳过; 我们需要的是得到将 r 映射为 s 的变换函数 $T(r)$ 。然后, 这两步可以合并为从 r 到 z 的一步变换。

正如前边的例子所示, 直方图规定化在原理上是简单的。在实践中, 一个共同的困难是寻找 $T(r)$ 和 G^{-1} 的有意义的表达式。幸运的是, 在处理离散量时, 问题可被大大简化。这里仅希望得到一个近似的直方图, 所以, 付出的代价与直方图均衡一样。然而, 不管这些, 可以得到一些非常有用的结果, 尽管结果是粗糙的近似。

式 (3.3-10) 的离散形式是式 (3.3-8) 中的直方图均衡变换, 为方便起见, 我们重写如下:

$$s_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \frac{(L-1)}{MN} \sum_{j=0}^k n_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3.3-13)$$

与前面一样, 其中 MN 是图像的像素总数, n_j 是具有灰度值 r_j 的像素数, L 是图像中可能的灰度级数。类似地, 给定一个规定的 s_k 值, 式 (3.3-11) 的离散形式涉及计算变换函数

$$G(z_q) = (L-1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i) \quad (3.3-14)$$

对一个 q 值, 有

$$G(z_q) = s_k \quad (3.3-15)$$

其中, $p_z(z_i)$ 是规定的直方图的第 i 个值。与前面一样, 我们用反变换找到期望的值 z_q :

$$z_q = G^{-1}(s_k) \tag{3.3-16}$$

换句话说, 该操作对每一个 s 值给出一个 z 值; 这样, 就形成了从 s 到 z 的一个映射。

实践中, 我们不需要计算 G 的反变换。因为我们处理的灰度级是整数(如 8 比特图像的灰度级是从 0 到 255), 使用式 (3.3-14) 计算 $q=0, 1, 2, \dots, L-1$ 时的所有可能 G 值是一件简单的事情。标定这些值, 并四舍五入为区间 $[0, L-1]$ 内的最接近整数。将这些值存储在一个表中。然后, 给定一个特殊的 s_k 值后, 我们可以查找存储在表中的最匹配的值。例如, 如果在表中第 64 个输入接近 s_k , 则 $q=63$ (注意, 我们是从 0 开始计数的), 故 z_{63} 是式 (3.3-15) 的最优解。这样, 给定的 s_k 值就与 z_{63} 关联在一起(即规定的 s_k 值将映射为 z_{63})。因为 z 项是用于规定的直方图 $p_z(z)$ 作为基础所用的灰度, 它遵循 $z_0=0, z_1=1, \dots, z_{L-1}=L-1$, 因此, z_{63} 的灰度值为 63。重复该过程, 我们将找到每个 s_k 值到 z_q 值的映射, 它们是式 (3.3-15) 的最接近的解。这些映射也是直方图规定化问题的解。

回忆 s_k 是直方图均衡后的图像的值, 我们可以总结直方图规定化过程如下:

1. 计算给定图像的直方图 $p_r(r)$, 并用它寻找式 (3.3-13) 的直方图均衡变换。把 s_k 四舍五入为范围 $[0, L-1]$ 内的整数。
2. 用式 (3.3-14) 对 $q=0, 1, 2, \dots, L-1$ 计算变换函数 G 的所有值, 其中 $p_z(z_i)$ 是规定的直方图的值。把 G 的值四舍五入为范围 $[0, L-1]$ 内的整数。将 G 的值存储在一个表中。
3. 对每一个值 $s_k, k=0, 1, 2, \dots, L-1$, 使用步骤 2 存储的 G 值寻找相应的 z_q 值, 以使 $G(z_q)$ 最接近 s_k , 并存储这些从 s 到 z 的映射。当满足给定 s_k 的 z_q 值多于一个时(即映射不唯一时), 按惯例选择最小的值。
4. 首先对输入图像进行均衡, 然后使用步骤 3 找到的映射把该图像中的每个均衡后的像素值 s_k 映射为直方图规定化后的图像中的相应 z_q 值, 形成直方图规定化后的图像。正如连续情况那样, 均衡输入图像的中间步骤是概念上的。它可以用合并两个变换函数 T 和 G^{-1} 跳过这一步, 如例 3.8 所示。

如早些时候提到的那样, 对于满足条件(a')和(b)的 G^{-1} , G 必须是严格单调的, 根据式 (3.3-14), 它意味着规定的直方图的任何 $p_z(z_i)$ 值都不能为零(见习题 3.10)。当工作在离散数值的情况时, 该条件可能不满足的事实并不是一个严重的实现问题, 如上面的步骤 3 中指出的那样。下面的例子用数字说明了这一情况。

例 3.8 直方图规定化的一个简单例子。

再次考虑例 3.5 中大小为 64×64 的假设图像, 其直方图重复显示在图 3.22(a) 中。希望变换该直方图, 以便使其具有表 3.2 中第二列规定的值。图 3.22(b) 显示了该直方图的大概形状。

表 3.2 规定直方图 and 实际直方图 (第三列的值来自例 3.8 中的计算结果)

z_q	规定的 $p_z(z_q)$	实际的 $p_z(z_k)$
$z_0=0$	0.00	0.00
$z_1=1$	0.00	0.00
$z_2=2$	0.00	0.00
$z_3=3$	0.15	0.19
$z_4=4$	0.20	0.25
$z_5=5$	0.30	0.21
$z_6=6$	0.20	0.24
$z_7=7$	0.15	0.11

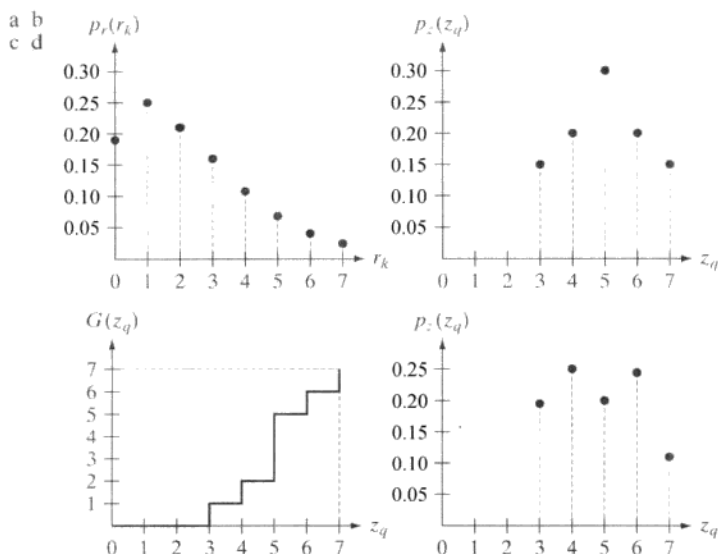


图 3.22 (a)一幅 3 比特图像的直方图; (b)规定的直方图; (c)从规定的直方图得到的变换函数; (d)执行直方图规定化的结果。请比较图 (b) 和图 (d)

过程的第一步是得到标定的直方图均衡后的值, 就像在例 3.5 中那样:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 & s_2 &= 5 & s_4 &= 6 & s_6 &= 7 \\ s_1 &= 3 & s_3 &= 6 & s_5 &= 7 & s_7 &= 7 \end{aligned}$$

接着, 我们使用式 (3.3-14) 来计算变换函数 G 的所有值:

$$G(z_0) = 7 \sum_{j=0}^0 p_z(z_j) = 0.00$$

类似地, 有

$$G(z_1) = 7 \sum_{j=0}^1 p_z(z_j) = 7[p(z_0) + p(z_1)] = 0.00$$

和

$$G(z_2) = 0.00, G(z_4) = 2.45, G(z_6) = 5.95, G(z_3) = 1.05, G(z_5) = 4.55, G(z_7) = 7.00。$$

如例 3.5 那样, 要把这些分数值转换为有效区间 $[0, 7]$ 内的整数。结果是

$$\begin{aligned} G(z_0) &= 0.00 \rightarrow 0 & G(z_4) &= 2.45 \rightarrow 2 \\ G(z_1) &= 0.00 \rightarrow 0 & G(z_5) &= 4.55 \rightarrow 5 \\ G(z_2) &= 0.00 \rightarrow 0 & G(z_6) &= 5.95 \rightarrow 6 \\ G(z_3) &= 1.05 \rightarrow 1 & G(z_7) &= 7.00 \rightarrow 7 \end{aligned}$$

这些结果总结在表 3.3 中, 变换函数画在图 3.22(c) 中。观察发现 G 并不是严格单调的, 所以违反了条件 (a')。因此, 我们使用算法的步骤 3 中描述的方法来处理这种情况。

在过程的第三步中, 我们找到 z_q 的最小值, 所以值 $G(z_q)$ 最接近 s_k 。我们对每一个 s_k 值这样做, 以产生从 s 到 z 所需要的映射。例如, $s_0 = 1$, 我们看到 $G(z_3) = 1$, 在这种情况下, 这是完美的匹配, 因此我们有对应 $s_0 \rightarrow z_3$ 。也就是说, 直方图均衡后的图像中的每个值为 1 的像素映射为直方图规定化后的图像中(相应位置上)的值为 3 的像素。继续采用这一方法, 我们得到表 3.4 中的映射。

表 3.3 变换函数 G 关于 z 的所有可能值(已四舍五入并排序)

z_q	$G(z_q)$
$z_0=0$	0
$z_1=1$	0
$z_2=2$	0
$z_3=3$	1
$z_4=4$	2
$z_5=5$	5
$z_6=6$	6
$z_7=7$	7

表 3.4 将所有的 s_k 值映射到相应的 z_q 值

s_k	$\rightarrow$	z_q
1	$\rightarrow$	3
3	$\rightarrow$	4
5	$\rightarrow$	5
6	$\rightarrow$	6
7	$\rightarrow$	7

在过程的最后一步中, 我们使用表 3.4 中的映射把直方图均衡后的图像中的每个像素映射为新创建的直方图规定化图像中的相应像素。结果直方图的值列在表3.2的第三列, 直方图画在图3.22(d)中。 $p_z(z_q)$ 的值是使用例 3.5 中的相同过程得到的。例如, 我们在表 3.4 中看到, $s=1$ 映射为 $z=3$, 在直方图均衡后的图像中有 790 个像素取 1 值。因此, $p_z(z_3)=790/4096=0.19$ 。

虽然示于图 3.22(d) 中的最终结果并不完全与规定的直方图匹配, 但我们达到了将灰度明确地移向灰度级高端的目的。正如早些时候提到的那样, 得到直方图均衡后图像的中间步骤对于解释该过程是有帮助的, 但它并不是需要的。相反, 我们可以在表中的第三列列出从 r 到 s 的映射和从 s 到 z 的映射。然后, 我们使用这些映射把原始像素直接映射到直方图规定化后的图像的像素。

例 3.9 直方图均衡与直方图匹配的比较。

图 3.23(a) 显示了火星卫星(Phobos)图像, 该图像由 NASA 的火星表面探测器拍摄。图 3.23(b) 显示了图 3.23(a) 的直方图。图像的大部分是暗色区域, 产生了像素集中于灰度级暗端的直方图的特点。乍看之下, 会得到直方图均衡化是增强该图像的一个好办法的结论, 以便使暗区域的细节更清楚。下面的讨论将证明事实并非如此。

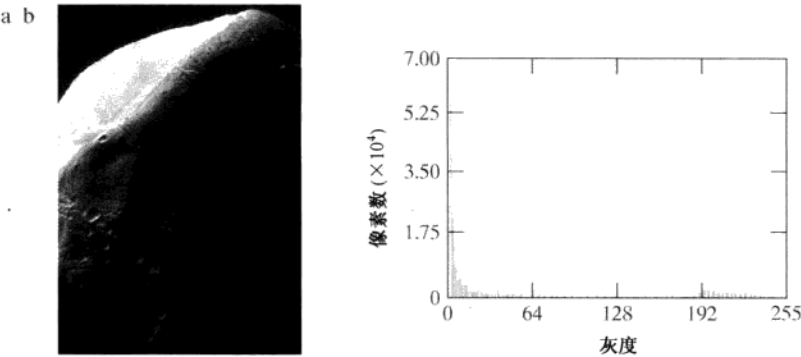


图 3.23 (a) 由 NASA 的火星表面探测器拍摄的火星卫星(Phobos)图像; (b) 直方图(原图像由 NASA 提供)

图 3.24(a) 显示了由图 3.23(b) 所示直方图得到的直方图均衡变换 [式(3.3-8)或式(3.3-13)]。这个变换函数最相关的特征是它从灰度 0 快速上升到接近 190。这是因为输入直方图中有大量的像素灰度接近 0。当这种变换应用于输入图像的灰度, 以获得直方图的均衡效果时, 最终结果是把非常窄的暗像素区间接射到输出图像灰度级的高端。因为输入图像的大量像素在此区间有精确的灰度值, 所以我们希望结果是具有明亮、“冲淡”外观的图像。如图 3.24(b) 所示, 情况确实如此。该图像的直方图示于图 3.24(c)。注意, 所有灰度级基本上都偏向于灰度范围的上半部。

157
~
158

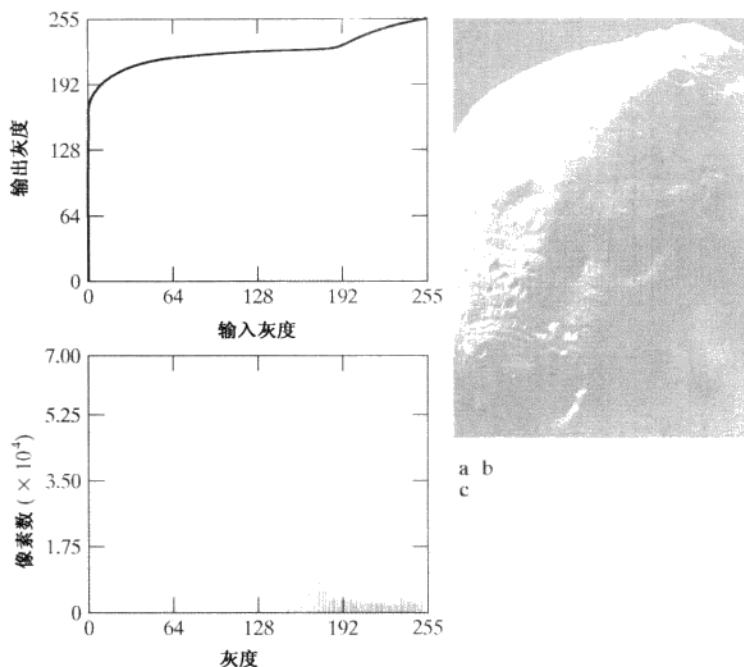


图 3.24 (a) 直方图均衡的变换函数; (b) 直方图均衡后的图像(注意“冲淡”的外观); (c) 图(b)的直方图

由于图 3.24(a) 中变换函数的问题是由原图像中大量灰度接近于 0 的像素引起的, 一种合理的方法是修改图像的直方图, 以便使其不再有这一属性。图 3.25(a) 显示了一个人为规定的函数, 该函数保持了原有直方图的基本形状, 但在图像灰度暗区的灰度值却有更平滑的过渡。将这个函数取样为 256 个等间隔的离散值, 就生成了所需的规定的直方图。使用式 (3.3-14) 从这一直方图得到的变换函数 $G(z)$, 该变换在图 3.25(b) 中标注为变换 (1)。类似地, 由式 (3.3-16) (使用前面讨论的逐步过程得到) 导出的反变换函数 $G^{-1}(s)$ 在图 3.25(b) 中标注为变换 (2)。图 3.25(c) 中增强后的图像是把变换 (2) 用于图 3.24(b) 中直方图均衡化后的图像的像素得到的。比较这两幅图像可以看出, 在使用直方图均衡得到的结果的基础上, 直方图规定化图像的改进是很明显的。注意, 原始直方图的细小改变会使图像的外观得到显著改进。图 3.25(d) 显示了图 3.25(c) 的直方图。该直方图最容易辨别的特征是其低端已向右移向灰度级的较亮区域(但并不过分), 这正是我们所希望的。

到目前为止, 虽然我们对直方图规定化已经很清楚了, 但在结束这一节之前, 我们要强调直方图规定化在大多数时候都是试凑过程。这正像前边的例子中我们所做的那样, 一个可用的指导路线是用手边的问题学习。但是, 有时可能会遇到这样的情况, 即定义“平均”直方图的外观, 并把它作为规定的直方图。在这种情况下, 直方图规定化就变成了一种直接的处理。然而, 一般来说, 并没有规定直方图的规则, 对于任何一个给定的增强任务都必须借助于实际分析。

3.3.3 局部直方图处理

前两节讨论的直方图处理方法是全局性的, 在某种意义上, 像素被基于整幅图像的灰度分布的变换函数修改。虽然这种全局方法适用于整个图像的增强, 但存在这样的情况, 增强图像中小区域的细节也是需要的。这些区域中, 一些像素的影响在全局变换的计算中可能被忽略了, 因为全局变换没有必要保证期望的局部增强。解决方法是以图像中每个像素的邻域中的灰度分布为基础设计变换函数。

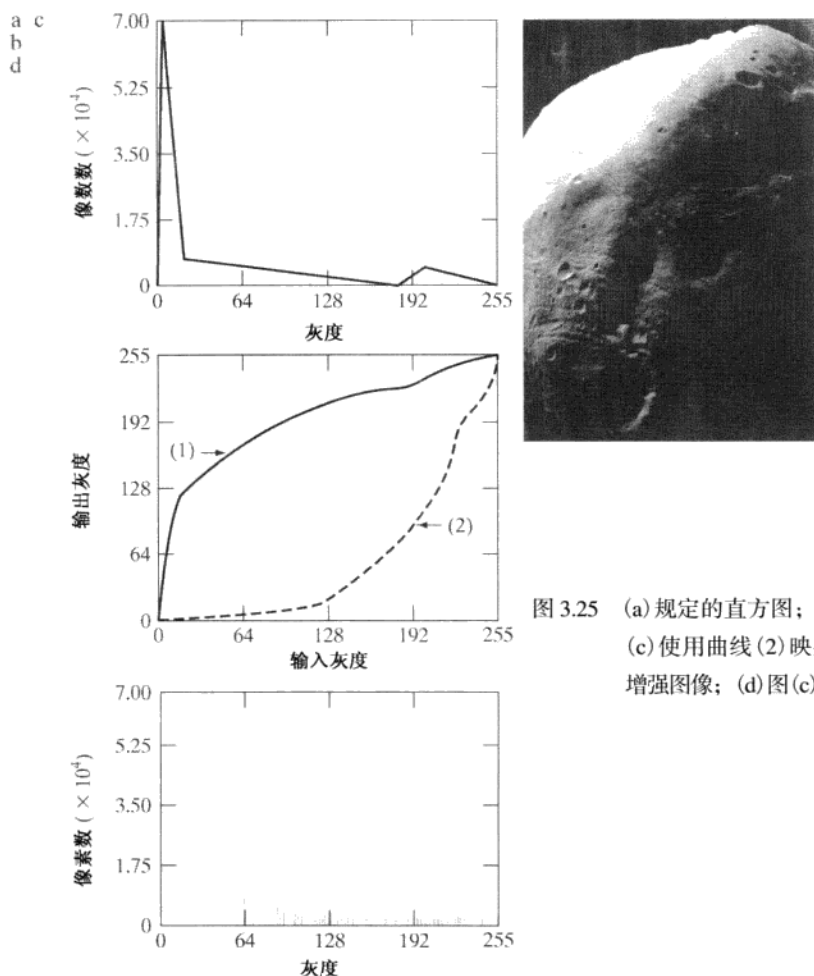


图 3.25 (a) 规定的直方图; (b) 变换; (c) 使用曲线 (2) 映射得到的增强图像; (d) 图 (c) 的直方图

前面描述的直方图处理技术很容易适应局部增强。该过程是定义一个邻域，并把该区域的中心从一个像素移至另一个像素。在每个位置，计算邻域中的点的直方图，并且得到的不是直方图均衡化，就是规定化变换函数。这个函数最终用于映射邻域中心像素的灰度。然后，邻域的中心被移至一个相邻像素位置，并重复该过程。当邻域进行逐像素平移时，由于只有邻域中的一行或一列改变，所以可在每一步移动中，以新数据更新前一个位置得到的直方图(见习题 3.12)。这种方法与区域每移动一个像素位置就计算邻域中所有像素的直方图相比有明显的优点。有时用于减少计算量的另一种方法是使用非重叠区域，但这种方法通常会产生我们不希望的“棋盘”效应。

例 3.10 局部直方图均衡。

图 3.26(a) 显示了一幅大小为 512×512 的 8 比特图像，初看之下，该图像在灰色背景上包含 5 个黑色方块。图像有轻微的噪声，但是噪声感觉不到。图 3.26(b) 显示了全局直方图均衡的结果。当用直方图均衡平滑噪声区域时，情况经常如此。该图像显示噪声明显地增强了。然而，除了噪声之外，图 3.26(b) 与原图像相比并未显示新的重要细节，只是不明显地给出了左上方和右下方方块中包含有一个物体。图 3.26(c) 是使用大小为 3×3 的邻域的局部直方图均衡得到的。这里，我们看到了包含在暗色方块中的物体。这些物体的灰度值太接近大方块的灰度，而且它们太小，全局直方图均衡化不足以影响这些细节的显示。

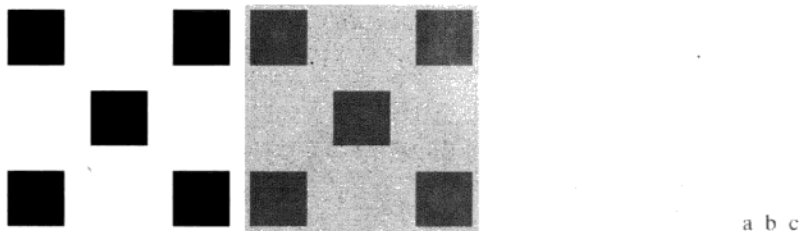


图 3.26 (a) 原图像; (b) 全局直方图均衡的结果; (c) 使用大小为 3×3 的邻域对图(a)应用局部直方图均衡的结果

3.3.4 在图像增强中使用直方图统计

直接从直方图获得的统计参数可用于图像增强。令 r 表示在区间 $[0, L-1]$ 上代表灰度值的一个离散随机变量, 并令 $p(r_i)$ 表示对应于 r_i 值的归一化直方图分量。如前面指出的那样, 我们可以把 $p(r_i)$ 看成是得到直方图的那幅图像的灰度 r_i 出现的概率的估计。

像 2.6.8 节讨论的那样, r 关于其均值的 n 阶矩定义为

$$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_i) \quad (3.3-17)$$

其中, m 是 r 的均值(平均灰度, 即图像中像素的平均灰度):

$$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i) \quad (3.3-18)$$

二阶矩特别重要:

$$\mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i) \quad (3.3-19)$$

我们将该表达式称为灰度方差, 通常用 σ^2 表示(回忆一下, 标准差是方差的平方根)。均值是平均灰度的度量, 方差(或标准差)是图像对比度的度量。显然, 一旦从给定的图像得到了直方图, 用前边的表达式就很容易计算所有的矩。

在仅处理均值和方差时, 实际上通常直接从取样值来估计它们, 而不必计算直方图。近似地, 这些估计称为取样均值和取样方差。它们可以根据基本的统计学由下面熟悉的形式给出:

$$m = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3.3-20)$$

和

$$\sigma^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - m]^2 \quad (3.3-21)$$

其中, $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。换句话说, 众所周知, 一幅图像的平均灰度可以由求所有像素的灰度值之和并用图像中的像素总数去除而得到。类似的解释适用于式(3.3-21)。如下面的例子所示, 使用这两个公式得到的结果等同于使用式(3.3-18)和式(3.3-19)

我们遵守使用 m 来表示均值的约定。请不要将它与用于表示一个大小为 $m \times n$ 的邻域的行列数的相同符号混淆, 因为在表示邻域的行列数时, 我们也遵守了符号表示约定。

式(3.3-21)中的分母有时写为 $MN-1$ 而不是 MN 。这样做的目的是获得方差的一个所谓的无偏估计。但是, 我们对式(3.3-21)和式(3.3-19) [在后一公式中的直方图是由式(3.3-21)使用的同一幅图像计算得到的] 一致更感兴趣。因此, 我们要求 MN 项。对于实际大小的任何图像, 差别可以忽略不计。

得到的结果,前提是这些公式中使用的直方图是由式(3.3-20)和式(3.3-21)中使用的同一幅图像计算得到的。

例 3.11 直方图统计计算。

在继续讨论之前,通过一个简单的数字例子巩固一下概念是有必要的。考虑下面的大小为 5×5 的 2 比特图像:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

像素由 2 比特表示;因此, $L=4$ 且灰度级在 $[0, 3]$ 范围内。总像素数是 25, 因此, 直方图分量为

$$\begin{aligned} p(r_0) &= \frac{6}{25} = 0.24, & p(r_1) &= \frac{7}{25} = 0.28 \\ p(r_2) &= \frac{7}{25} = 0.28, & p(r_3) &= \frac{5}{25} = 0.20 \end{aligned}$$

其中, $p(r_i)$ 中的分子是具有灰度级 r_i 的图像中的像素数。我们可用式(3.3-18)计算图像中灰度级的平均值:

$$m = \sum_{i=0}^3 r_i p(r_i) = (0)(0.24) + (1)(0.28) + (2)(0.28) + (3)(0.20) = 1.44$$

令 $f(x, y)$ 表示前面的 5×5 阵列, 使用式(3.3-20) 我们得到

$$m = \frac{1}{25} \sum_{x=0}^4 \sum_{y=0}^4 f(x, y) = 1.44$$

如期望的那样, 结果一致。类似地, 使用式(3.3-19)或式(3.3-21)得到的方差相同(均为 1.1264)。

我们考虑用于增强目的的均值和方差的两种应用。全局均值和方差是在整幅图像上计算的, 这对于全面灰度和对比度的总体调整是有用的。这些参数的一种更强有力的应用是局部增强, 在局部增强中, 局部均值和方差是根据图像中每一像素的邻域内的图像特征进行改变的基础。

令 (x, y) 表示给定图像中任意像素的坐标, S_{xy} 表示规定大小的以 (x, y) 为中心的邻域(子图像)。该邻域中像素的均值由下式给出:

$$m_{S_{xy}} = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p_{S_{xy}}(r_i) \quad (3.3-22)$$

其中, $p_{S_{xy}}$ 是区域 S_{xy} 中像素的直方图。该直方图有 L 个分量, 对应于输入图像中 L 个可能的灰度值。然而, 许多分量是 0, 具体取决于 S_{xy} 的大小。例如, 如果邻域大小为 3×3 且 $L=256$, 那么该邻域的直方图的 256 个分量中仅 1 和 9 之间的分量非零。这些非零值将对应 S_{xy} 中的不同灰度数(在 3×3 区域中可能的不同灰度的最大数是 9, 最小数是 1)。

类似地, 邻域中像素的方差由下式给出:

$$\sigma_{S_{xy}}^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m_{S_{xy}})^2 p_{S_{xy}}(r_i) \quad (3.3-23)$$

和前面一样, 局部均值是邻域 S_{xy} 中平均灰度的度量, 局部方差(或标准差)是邻域中灰度对比度的度

量。对邻域, 我们可写出类似于式(3.3-20)和式(3.3-21)的表达式, 即简单地对邻域中的像素值求和, 并除以邻域中的像素数。

正如下面的例子说明的那样, 使用局部均值和方差进行图像处理的一个重要方面是它的灵活性, 它们提供了简单而强有力的基于统计度量的增强技术, 而统计度量与图像的外观有紧密的、可预测的关系。

例 3.12 使用直方图统计的局部增强。

图 3.27(a) 显示了一根绕在支架上的钨丝的 SEM(扫描电子显微镜)图像。图像中央的钨丝及其支架很清楚并很容易分析。在该图像的右侧即图像的暗侧, 有另一根钨丝的结构, 但几乎不能察觉到, 其大小和特征当然也不容易辨认。通过对比度操作进行局部增强是解决这种图像中包含部分隐含特征问题的理想方法。

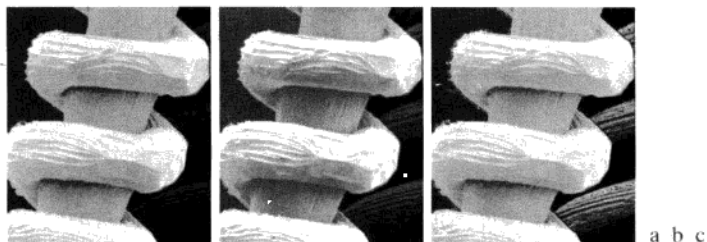


图 3.27 (a) 放大了约 130 倍的钨丝的 SME 图像; (b) 全局直方图均衡的结果; (c) 使用局部直方图统计增强后的图像(原图像由俄勒冈大学地质科学系的 Michael Shaffer 先生提供)

在这种特殊情况中, 问题是增强暗色区域, 但同时尽可能保留明亮区域不变, 因为明亮区域并不需要增强。我们可以使用本节介绍的概念来阐明一种增强方法, 这种方法能分辨暗区域与亮区域的不同, 同时只增强暗区域。判断一个区域在点 (x, y) 是暗还是亮的方法是把局部平均灰度 m_{s_y} 与表示为 m_G 并称之为全局均值的平均图像灰度进行比较。这种量可使用整个图像并用式(3.3-18)或式(3.3-20)得到。这样, 我们就有了增强方案的基础: 如果 $m_{s_y} \leq k_0 m_G$, 其中 k_0 是一个值小于 1.0 的正常数, 那么我们将把点 (x, y) 处的像素考虑为处理的候选点。

因为我们感兴趣的是增强低对比度的区域, 所以还需要一种度量方法来确定一个区域的对比度是否可作为增强的候选点。因此, 如果 $\sigma_{s_y} \leq k_2 \sigma_G$, 则认为在点 (x, y) 处的像素是增强的候选点, 其中 σ_G 是由式(3.3-19)或式(3.3-21)得到的全局标准差, k_2 为正常数。如果我们的兴趣是增强亮区域, 则该常数大于 1.0, 对于暗区, 则小于 1.0。

最后, 我们需要限制能够接受的最低的对比度值, 否则该过程会试图增强标准差为零的恒定区域。因此, 我们通过要求 $k_1 \sigma_G \leq \sigma_{s_y}$, $k_1 < k_2$, 对局部标准差设置一个较低的限制值。满足局部增强所有条件的一个位于点 (x, y) 处的像素, 可简单地通过将像素值乘以一个指定常数 E 来处理, 以便相对于图像的其他部分增大(或减小)其灰度值。不满足增强条件的像素则保持不变。

以上增强方法可总结如下: 令 $f(x, y)$ 表示在图像任意坐标 (x, y) 处的像素值, 而令 $g(x, y)$ 表示这些坐标处相应的增强的像素值, 则对于 $x = 0, 1, 2, \dots, M-1, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$, 有

$$g(x, y) = \begin{cases} E \cdot f(x, y), & m_{s_y} \leq k_0 m_G \text{ 且 } k_1 \sigma_G \leq \sigma_{s_y} \leq k_2 \sigma_G \\ f(x, y), & \text{其他} \end{cases} \quad (3.3-24)$$

其中, 如前所述, E, k_0, k_1 和 k_2 是规定的参数; m_G 是输入图像的全局均值; σ_G 是输入图像的标准差。参数 m_{s_y} 和 σ_{s_y} 分别是局部均值和标准差。按惯例, M 和 N 是图像行和列的维数。

通常,式(3.3-24)中选择参数需要做一些试验,以熟悉一幅给定的图像或一类图像。在这种情况下,常常选择下列数值: $E=4.0$, $k_0=0.4$, $k_1=0.02$ 和 $k_2=0.4$ 。之所以对 E 选择相对较低的值 4.0,原因在于当 E 与将被增强区域(暗色区域)中的灰度相乘后,结果仍会趋于灰度级的暗端,从而保持图像的视觉平衡。选择的 k_0 值比全局均值的一半略小,因为我们观察一幅图像时,我们了解到需要增强的区域确实比全局平均值的一半还要暗。类似的分析可指导 k_1 和 k_2 值的选择。这些常数的选择通常并不困难,但这些明确的选择必须以对具体增强问题的逻辑分析为指导。最后,为保留细节和尽量减少计算负担,局部区域 S_y 的大小应尽可能小。因此,我们选择大小为 3×3 的小区域。

作为比较的基础,我们使用全局直方图均衡增强一幅图像。图 3.27(b)显示了这一结果。暗区域被改进了,但辨别细节还是很困难,亮区域也变化了,这是我們不想做的事情。图 3.27(c)显示了使用上面描述的局部统计方法处理的结果。该图像与图 3.27(a)中的原图像或图 3.27(b)中经直方图均衡后的结果相比,我们注意到,图 3.27(c)的右边显示出了明显的细节。观察该例子,暗灯丝中的脊线现在非常清楚。值得注意的是,左侧的亮灰度区域被完整地保留了,这是我们的初始目的之一。

3.4 空间滤波基础

在这一节,我们介绍空间滤波图像处理的几个基本概念。空间滤波是图像处理领域应用广泛的主要工具之一。因此,我们应充分理解这些基本概念。正如在本章开始时提到的那样,本节的例子多数涉及使用空间滤波来增强图像。空间滤波的其他应用将在后面几章中讨论。

滤波一词借用于频域处理,频率域处理是下一章的主题,在下一章中,“滤波”是指接受(通过)或拒绝一定的频率分量。例如,通过低频的滤波器称为低通滤波器。低通滤波器的最终效果是模糊(平滑)一幅图像。我们可以用空间滤波器(也称为空间掩模、核、模板和窗口)直接作用于图像本身而完成类似的平滑。事实上,如第 4 章所示,线性空间滤波与频率域滤波之间存在一一对应的关系。然而,空间滤波可提供相当多的功能,就像您稍后将看到的那样,它们还可用于非线性滤波,而这在频率域中是做不到的。

关于线性的讨论,请参阅 2.6.2 节。

3.4.1 空间滤波机理

在图 3.1 中,我们简单解释过,空间滤波器由(1)一个邻域(典型地是一个较小的矩形), (2)对该邻域包围的图像像素执行的预定义操作组成。滤波产生一个新像素,新像素的坐标等于邻域中心的坐标,像素的值是滤波操作的结果^①。滤波器的中心访问输入图像中的每个像素,就生成了处理(滤波)后的图像。如果在图像像素上执行的是线性操作,则该滤波器称为线性空间滤波器。否则,滤波器就称为非线性空间滤波器。首先,我们重点关注线性滤波器,然后,说明某些简单的非线性滤波器。5.3 节将包含更多的非线性滤波器及其应用的更全面的内容。

图 3.28 说明了使用 3×3 邻域的线性空间滤波的机理。在图像中的任意一点 (x, y) , 滤波器的响应 $g(x, y)$ 是滤波器系数与由该滤波器包围的图像像素的乘积之和:

$$g(x, y) = w(-1, -1)f(x-1, y-1) + w(-1, 0)f(x-1, y) + \cdots + w(0, 0)f(x, y) + \cdots + w(1, 1)f(x+1, y+1)$$

很明显,滤波器的中心系数 $w(0, 0)$ 对准位置 (x, y) 的像素。对于一个大小为 $m \times n$ 的模板,我们假设 $m=2a+1$ 且 $n=2b+1$, 其中 a, b 为正整数。这意味着在后续的讨论中,我们关注的是奇数尺寸的滤

^① 滤波后的像素值通常会赋给新创建图像中的对应位置,以容纳滤波的结果。滤波后的像素代替原图像中对应位置的值的情形很少见,因为这会在改变图像内容的同时执行滤波操作。

波器,其最小尺寸为 3×3 。一般来说,使用大小为 $m \times n$ 的滤波器对大小为 $M \times N$ 的图像进行线性空间滤波,可由下式表示:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x+s, y+t)$$

其中, x 和 y 是可变的,以便 w 中的每个像素可访问 f 中的每个像素。

当然,也可以使用偶数尺寸的滤波器,或使用混合有偶数尺寸和奇数尺寸的滤波器。但是,使用奇数尺寸的滤波器可简化索引,并更为直观,因为滤波器的中心落在整数位置上。

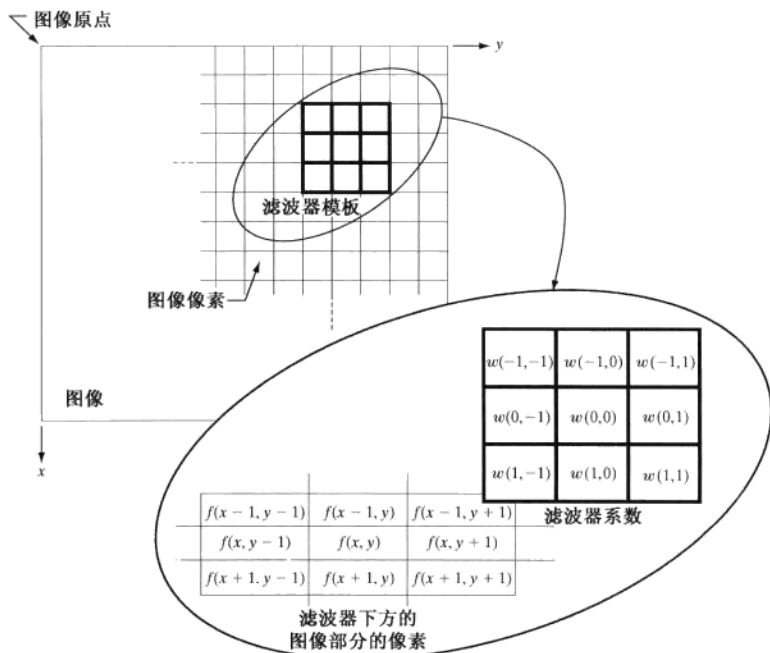


图 3.28 使用大小为 3×3 的滤波器模板的线性空间滤波的机理。表示滤波器模板系数的坐标所选择的形式简化了线性滤波的表达式

3.4.2 空间相关与卷积

在执行线性空间滤波时,必须清楚地理解两个相近的概念。一个是相关,另一个是卷积。如前节描述的那样,相关是滤波器模板移过图像并计算每个位置乘积之和的处理。卷积的机理相似,但滤波器首先要旋转 180° 。解释这两个概念的区别的最好方法是举一个例子。我们从一个一维示例开始。

图 3.29(a)显示了一个一维函数 f 和一个滤波器 w ,图 3.29(b)显示了执行相关的起始位置。我们注意到的第一件事情是存在未覆盖的部分函数。该问题的解决办法是在 f 的任意一侧补上足够的 0,以便使 w 中的每一个像素都可访问到 f 中的每一个像素。如果滤波器的尺寸是 m ,那么我们需要在 f 的一侧补 $m-1$ 个 0。图 3.29(c)显示了适当填充过的函数。相关的第一个值是如图 3.29(c)所示的初始位置的 f 和 w 的乘积之和(乘积之和为 0)。这相当于位移 $x=0$ 。为了得到相关的第二个值,我们把 w 向右移动一个像素位置(位移 $x=1$),并计算乘积之和。结果还是 0。事实上,当 $x=3$ 时才第一次出现非零结果,在这种情况下, w 中的 8 覆盖 f 中的 1,相关的结果是 8。按这种方法进行,我们可以得到图 3.29(g)中的全部相关结果。注意, x 取了 12 个值(即 $x=0, 1, 2, \dots, 11$)使 w 滑过 f ,以便 w 中的每一个像素访问 f 中的每一个像素。通

零填充并不是唯一的选择。例如,我们可在 f 的两侧复制第一个元素和最后一个元素 $m-1$ 次,或镜像第一个元素和最后一个元素 $m-1$ 次,并为填充使用镜像后的值。

常, 我们喜欢使用大小与 f 相同的相关阵列, 在这种情况下, 我们将全部相关结果裁剪到原函数大小, 如图 3.29(h) 所示。

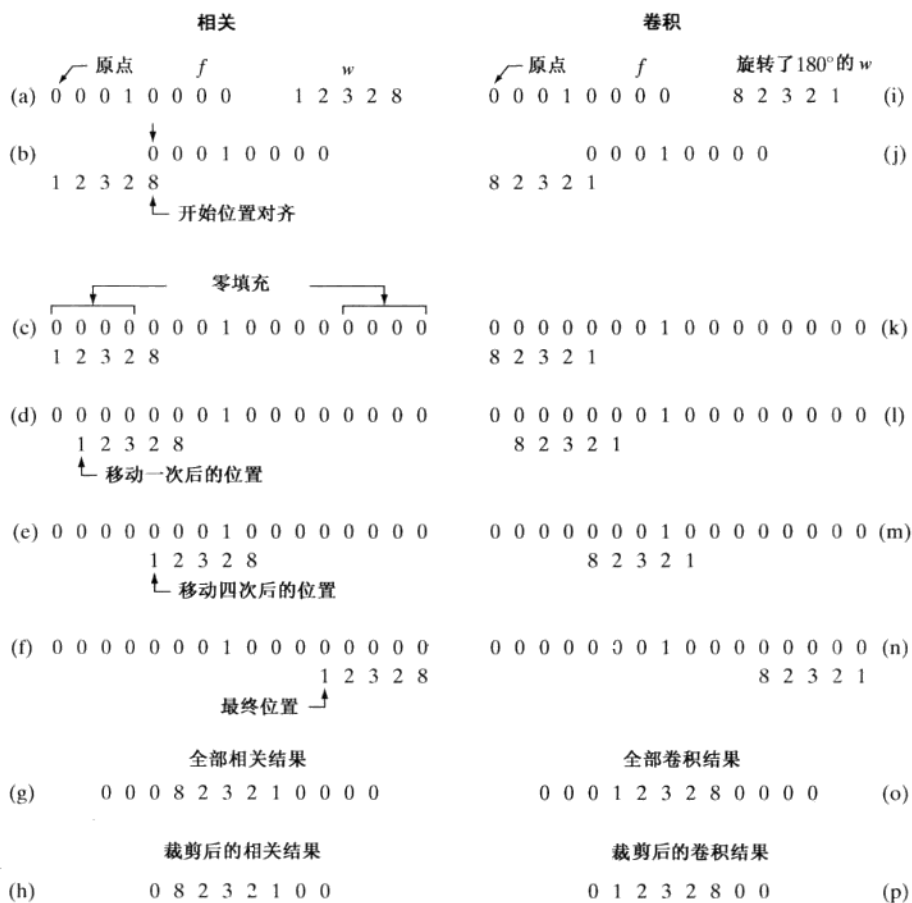


图 3.29 具有离散单位冲激的滤波器的一维相关与卷积的说明

从前一段的讨论可知, 有两个要点需要注意, 第一, 相关是滤波器位移的函数。换句话说, 相关的第一个值对应于滤波器的零位移, 第二个值对应于一个单元位移, 等等。第二, 滤波器 w 与包含有全部 0 和单个 1 的函数相关, 得到的结果是 w 的一个拷贝, 但旋转了180°。我们将包含单个 1 而其余都是 0 的函数称为离散单位冲激。因此, 我们得出结论: 一个函数与离散单位冲激相关, 在该冲激位置产生这个函数的一个翻转的版本。

卷积的概念是线性系统理论的基石。正如您将在第 4 章学到的那样, 卷积的基本特性是某个函数与某个单位冲激卷积, 得到一个在该冲激处的这个函数的拷贝。在前一段中我们看到, 相关操作也得到函数的一个拷贝, 但该拷贝旋转了180°。因此, 如果我们预先旋转滤波器, 并执行相同的滑动乘积求和操作, 就应该能得到希望的结果。如图 3.29 右边一列所示的那样, 情况的确如此。由此, 我们看到, 为了执行卷积, 我们需要做的是把一个函数旋转180°, 然后执行相关中的相同操作。正如其结果所示, 我们旋转两个函数的做法没有区别。

如图 3.30 所示, 前面的概念很容易扩展到图像。对于大小为 $m \times n$ 的滤波器, 我们在图像的顶部和

底部至少填充 $m-1$ 行 0, 在左侧和右侧填充 $n-1$ 列 0。在这种情况下, m 和 n 等于 3, 因此, 如图 3.30(b) 所示, 我们用两行 0 填充图像的顶部和底部, 用两列 0 填充图像的左侧和右侧。图 3.30(c) 显示了执行相关操作的滤波器模板的初始位置, 图 3.30(d) 显示了所有相关操作的结果。图 3.30(e) 显示了裁剪后的相应结果。再一次注意到, 结果旋转了 180° 。对于卷积, 与前面一样, 我们预先旋转模板, 然后使用刚才描述的方法对乘积做滑动求和操作。图 3.30(f) 到 (h) 显示了结果。您再次看到, 一个函数与一个冲激卷积, 在该冲激的位置复制了这个函数。这很清楚, 如果滤波器模板是对称的, 相关和卷积将得到相同的结果。

在二维情况下, 旋转 180° 等同于沿一个坐标轴翻转模板, 然后沿另一个坐标轴再次翻转模板。

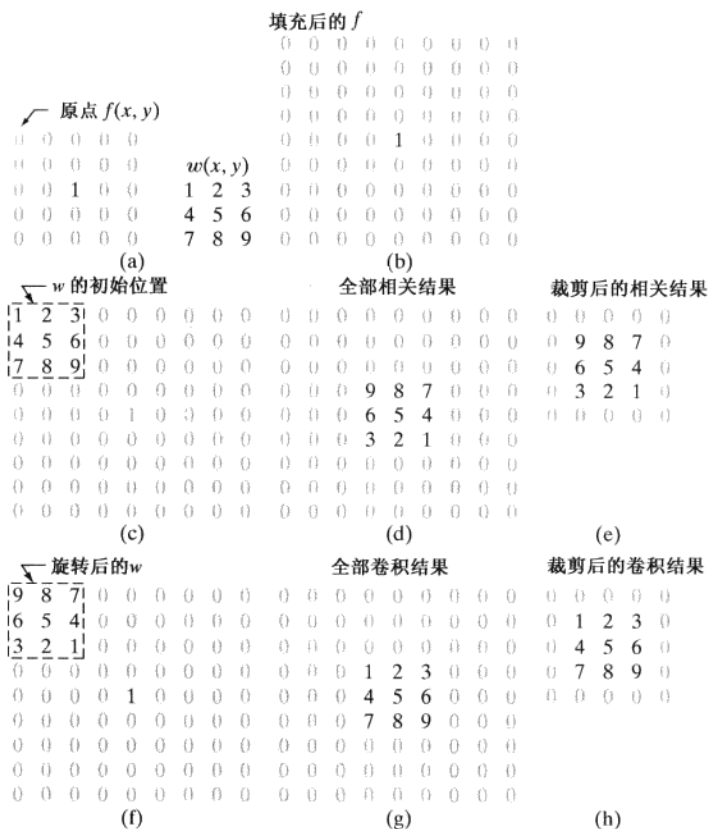


图 3.30 二维滤波器与二维离散单位冲激的相关(中间一行)和卷积(最后一行)。为便于视觉分析, 0 显示为灰色

替代包含单个 1, 如果图 3.30 中的图像 f 包含一个与 w 完全相等的区域, 当 w 位于 f 的区域的中心时, 相关函数(归一化后)的值将是最大的。这样, 正像您将在第 12 章看到的那样, 相关还可以用于寻找图像中的匹配。

以公式形式总结一下前面的讨论。一个大小为 $m \times n$ 的滤波器 $w(x, y)$ 与一幅图像 $f(x, y)$ 做相关操作, 可表示为 $w(x, y) \star f(x, y)$, 它由上一节末尾列出的公式给出, 为方便起见我们重写如下:

$$w(x, y) \star f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x+s, y+t) \quad (3.4-1)$$

这一等式对所有位移变量 x 和 y 求值, 以便 w 的所有元素访问 f 的每一个像素, 其中我们假设 f 已被

适当地填充。正如早些时候解释的那样, $a = (m-1)/2, b = (n-1)/2$, 同时, 为表示方便, 我们假设 m 和 n 是奇整数。

类似地, $w(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 的卷积表示为 $w(x, y) \star f(x, y)$ ^①, 它由下式给出:

$$w(x, y) \star f(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x-s, y-t) \quad (3.4-2)$$

通常, 在含义明确的情况下, 我们用函数 $g(x, y)$ 而不用 $w(x, y) \star f(x, y)$ 或 $w(x, y) \star f(x, y)$ 来表示相关或卷积的结果。例如, 参见前一节末尾的等式和式(3.5-1)。

其中等式右侧的减号表示翻转 f (即旋转 180°)。为简化符号表示, 我们遵循惯例, 翻转和移位 w 而不是 f 。结果是一样的。与相关一样, 该式也对所有位移变量 x 和 y 求值, 因此, w 的每一个元素访问 f 中的每一个像素, 同样我们也假设 f 已被适当地填充了。您可以对 3×3 模板展开式(3.4-2), 并自己证明使用该式的结果与图 3.30 中的例子是一样的。在实践中, 我们常常用一个算法实现式(3.4-1)。如果我们想要执行相关, 可将 w 输入到算法中; 如果要执行卷积, 可将旋转 180° 后的 w 输入到算法中。反过来, 如果代之以执行式(3.4-2)也是可用的。

如之前提及的那样, 卷积是线性系统理论的基础。我们将在第 4 章中学到, 一个函数与单位冲激的卷积, 相当于在单位冲激的位置处复制该函数, 这一特性在大量重要的推导中扮演核心的角色。我们将在第 4 章关于傅里叶变换和卷积定理的内容中再次回顾卷积。然而, 不像式(3.4-2), 我们将要处理的卷积是相同尺寸的。公式的形式是一样的, 但求和限不一样。

使用相关或卷积执行空间滤波是优先选择的方法。事实上, 因为无论是式(3.4-1) 还是式(3.4-2), 都可以通过简单地旋转滤波器去执行其功能, 重要的是在给定的滤波任务中, 按对应于期望操作的方式来指定滤波器模板。本章中的所有线性空间滤波结果都基于式(3.4-1)。

最后, 我们指出, 在图像处理文献中, 您很可能会遇到卷积滤波器、卷积模板或卷积核这些术语。按惯例, 这些术语用来表示一种空间滤波器, 并且滤波器未必用于真正的卷积。类似地, 模板与图像的卷积通常用于表示我们刚刚讨论的滑动乘积求和处理, 而不必区分相关与卷积间的差别。更合适的是, 它通常用于表示两种操作之一。这一不太严密的术语是产生混淆的根源。

3.4.3 线性滤波的向量表示

当我们的兴趣在于相关或卷积的模板的响应特性 R 时, 有时写成乘积的求和形式是方便的:

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_{mn} z_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} w_k z_k = \mathbf{w}^T \mathbf{z} \quad (3.4-3)$$

关于向量和矩阵的基本知识, 请读者查阅本书网站上的 Tutorials 部分。

其中 w 项是一个大小为 $m \times n$ 的滤波器的系数, z 为由滤波器覆盖的相应图像的灰度值。如果我们的兴趣是使用式(3.4-3)来做相关, 我们可用给定的模板。为了使用相同的公式进行卷积操作, 如上节描述的那样, 我们可以简单地把模板旋转 180° 。它意味着式(3.4-3)对特定的坐标对 (x, y) 是成立的。在下一节中, 您将了解为什么这一表示法对于描述给定的线性滤波器的特性是方便的。

作为一个例子, 图 3.31 显示了一个带有标号的普通 3×3 模板。在这种情况下, 式(3.4-3)变为

w_1	w_2	w_3
w_4	w_5	w_6
w_7	w_8	w_9

图 3.31 普通 3×3 滤波器模板的另一种表示

① 因为卷积满足交换律, 故有 $w(x, y) \star f(x, y) = f(x, y) \star w(x, y)$ 。相关则不满足交换律, 这一点可通过颠倒图 3.29(a) 中函数的顺序看出。

$$R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_9 z_9 = \sum_{k=1}^9 w_k z_k = \mathbf{w}^T \mathbf{z} \quad (3.4.4)$$

其中, $\mathbf{w}$ 是由模板的系数形成的 9 维向量, $\mathbf{z}$ 是由模板包含的图像灰度形成的 9 维向量。

3.4.4 空间滤波器模板的产生

生成一个大小为 $m \times n$ 的线性空间滤波器要求指定 mn 个模板系数, 这些系数是根据该滤波器支持什么样的操作来选择的, 记住, 我们使用线性滤波所能做的所有事情是实现乘积求和操作。例如, 假设我们想要将图像中的这些像素替换为以这些像素为中心的 3×3 邻域的平均灰度。在图像中任意位置 (x, y) 的灰度平均值是以 (x, y) 为中心的 3×3 邻域中的 9 个灰度值之和除以 9。令 $z_i, i = 1, 2, \dots, 9$ 表示这些灰度, 那么平均灰度为

$$R = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i$$

但该式与系数值为 $w_i = 1/9$ 的式 (3.4-4) 相同。换句话说, 使用系数为 $1/9$ 的 3×3 模板进行线性滤波操作可实现所希望的平均。正如我们在下一节中将要讨论的那样, 这一操作将导致图像平滑。在下面几节中, 我们讨论基于这种方法的几个滤波器模板。

在某些应用中, 我们有一个具有两个变量的连续函数, 其目的是基于该函数得到一个空间滤波模板。例如, 一个具有两个变量的高斯函数有如下基本形式:

$$h(x, y) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

其中, σ 是标准差, 并且, 通常我们假设坐标 x 和 y 是整数。譬如, 为了从该函数产生一个大小为 3×3 的滤波器模板, 我们关于其中心进行取样。这样, 就有 $w_1 = h(-1, -1)$, $w_2 = h(-1, 0)$, $\dots$, $w_9 = h(1, 1)$ 。使用类似的方式可产生一个 $m \times n$ 滤波器模板。回顾一下, 二维高斯函数具有钟形形状, 并且其标准差控制钟形的“紧度”。

产生非线性滤波器要求我们确定邻域的大小, 以及将对包含在邻域内的图像像素执行的操作。例如, 回忆可知最大操作是非线性的 (见 2.6.2 节), 以一幅图像中任意一点 (x, y) 为中心的一个 5×5 最大滤波器得到 25 个像素中的最大灰度值, 并将该值赋给处理后图像中位置为 (x, y) 的像素。非线性滤波器功能非常强大, 正如我们在本章稍后和第 5 章中所显示的那样, 在某些应用中它可执行超出线性滤波器能力的功能。

3.5 平滑空间滤波器

平滑滤波器用于模糊处理和降低噪声。模糊处理经常用于预处理任务中, 例如在 (大) 目标提取之前去除图像中的一些琐碎细节, 以及桥接直线或曲线的缝隙。通过线性滤波和非线性滤波模糊处理, 可以降低噪声。

3.5.1 平滑线性滤波器

平滑线性空间滤波器的输出 (响应) 是包含在滤波器模板邻域内的像素的简单平均值。这些滤波器有时也称为均值滤波器。正如前节提到的那样, 也可以把它们归入低通滤波器。

平滑滤波器的基本概念非常直观。它使用滤波器模板确定的邻域内像素的平均灰度值代替图像中每个像素的值, 这种处理的结果降低了图像灰度的“尖锐”变化。由于典型的随机噪声由灰度级

的急剧变化组成，因此，常见的平滑处理应用就是降低噪声。然而，由于图像边缘(几乎总是一幅图像希望有的特性)也是由图像灰度尖锐变化带来的特性，所以均值滤波处理还是存在着不希望有的边缘模糊的负面效应。另外，这类处理的其他应用包括如 2.4.3 节讨论过的由于灰度级数量不足而引起的伪轮廓效应的平滑处理。均值滤波器的主要应用是去除图像中的不相关细节，其中“不相关”是指与滤波器模板尺寸相比较小的像素区域。这将在这一节稍后的应用中加以说明。

图 3.32 显示了两个 3×3 平滑滤波器。第一个滤波器产生模板下方的标准像素平均值。把模板系数代入式 (3.4-4) 即可清楚地看出这一点：

$$R = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i$$

R 是由模板定义的 3×3 邻域内像素灰度的平均值。注意，代替上式中的 $1/9$ ，滤波器的系数全为“1”。这里的概念是系数取 1 值时计算更有效。在滤波处理之后，整个图像除以 9。一个 $m \times n$ 模板应有等于 $1/mn$ 的归一化常数。所有系数都相等的空间均值滤波器有时称为盒状滤波器。

图 3.32 所示的第二个模板更为重要一些。该模板产生所谓的加权平均，使用这一术语是指用不同的系数乘以像素，即一些像素的重要性(权重)比另一些像素的重要性更大。在图 3.32 (b) 所示的模板中，处于该模板中心位置的像素所乘的值比其他任何像素所乘的值都要大，因此，在均值计算中为该像素提供更大的重要性。其他像素如同是模板中心距离的函数那样赋以成反比的权重。由于对角项离中心比离正交方向相邻的像素(参数为 $\sqrt{2}$) 更远，所以它的权重比与中心直接相邻的像素更小。赋予中心点最高权重，然后随着距中心点距离的增加而减小系数值的加权策略的目的是在平滑处理中试图降低模糊。我们也可以选择其他权重来达到相同的目的。然而，图 3.32 (b) 所示模板中所有系数的和等于 16，对于计算机计算来说是一个有吸引力的特性，因为它是 2 的整数次幂。在实践中，由于这些模板在一幅图像中任何一个位置所跨过的区域很小，通常很难看出使用图 3.32 中的各种模板或类似方式进行平滑处理后的图像之间的区别。

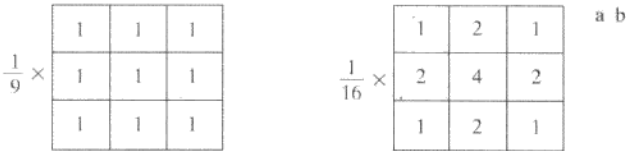


图 3.32 两个 3×3 平滑(均值)滤波器模板。每个模板前面的乘数等于 1 除以所有系数之和，这是计算平均值所要求的

参见式 (3.4-1)，一幅 $M \times N$ 的图像经过一个大小为 $m \times n$ (m 和 n 是奇数) 的加权均值滤波器滤波的过程可由下式给出：

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)} \tag{3.5-1}$$

上式中的参数见式 (3.4-1) 中的定义。正如前面说过的那样，它可以这样理解，即一幅完全滤波的图像是通过 $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ 和 $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ 执行式 (3.5-1) 得到的。式 (3.5-1) 中的分母部分简单地表示为模板的各系数之和，它是一个仅需计算一次的常数。

例 3.13 使用各种尺寸模板的图像平滑。

与滤波器模板尺寸有关的图像平滑效果如图 3.33 所示, 图中显示了一幅原图像以及分别用尺寸为 $m=3, 5, 9, 15$ 和 35 像素的方形均值滤波器得到的相应平滑结果。这些结果的主要特点如下: 当 $m=3$ 时, 可以观察到在整幅图像中有轻微的模糊, 但正如所希望的那样, 当图像细节与滤波器模板近似相同时, 图像中一些细节受到的影响比较大。例如, 图像中的 3×3 与 5×5 黑方块、较小的字母“a”和细颗粒噪声, 与图像的其他部分相比, 要更模糊一些。注意, 噪声显著地降低了, 字母的锯齿状边缘也令人满意地被平滑了。

$m=5$ 时的结果基本类似, 但模糊程度稍微有所增加。在 $m=9$ 时, 可以明显地看出图像更加模糊, 而且有 20% 的黑色圆圈几乎不能像在前三幅图像中那样与背景明显地区分开来, 这表明当目标的灰度与其相邻像素的灰度接近时, 会导致模糊目标的混合效应。 $m=15$ 和 35 时, 就图像中目标物的尺寸来说, 已属极端情况。这种极端类型的模糊处理通常用于去除图像中的一些小物体。例如, 在图 3.35 (f) 中, 三个小方框、两个小圆圈以及大部分噪声矩形区域已融入到背景中。注意, 在这幅图中还有明显的黑的边界。这是我们用 0 (黑色) 填充原图像的边缘, 经过滤波后再去除填充区域的结果。某些黑色混入了所有滤波后的图像, 但对于使用较大滤波器平滑的图像, 这就成为问题了。



图 3.33 (a) 大小为 500×500 像素的原图像; (b)~(f) 用大小分别为 $m=3, 5, 9, 15$ 和 35 的方形均值滤波模板平滑处理的结果。顶部的黑色方块大小分别为 3, 5, 9, 15, 25, 35, 45 和 55 个像素, 它们的边界相隔 25 个像素。底部字母的大小在 10 点到 24 点之间, 增量为 2 个点; 顶部的最大字母为 60 点。垂直线段条宽为 5 个像素, 高为 100 个像素, 线条间距为 20 个像素。圆的直径为 25 个像素, 它们的边界相隔 15 个像素, 灰度级为 0% 到 100% 的黑色范围内, 以 20% 增加。图像背景为黑色的 10%。噪声矩形区域大小为 50×120 像素

正像早些时候提到的那样, 空间均值处理的一个重要应用是为了对感兴趣的物体得到一个粗略的描述而模糊一幅图像, 这样, 那些较小物体的灰度就与背景混合在一起了, 较大物体变得像“斑点”而易于检测。模板的大小由那些即将融入背景中的物体尺寸来决定。作为实例, 考虑图 3.34 (a), 它是绕地轨道上的哈勃望远镜拍摄的一幅图像。图 3.34 (b) 显示了应用 15×15 均值滤波器模板对该图像处理后的结果。我们可以看到, 图像中的一些部分或者融入背景中, 或者其亮度明显降低了。像这样利用阈值处理并基于物体亮度来消除某些物体的操作是很典型的。使用等于模糊图像最高亮度 25% 的阈值, 并用图 3.2 (b) 的阈值函数处理的结果示于图 3.34 (c) 中。将该结果与原图像比较, 我们看到, 考虑图像中最大、最亮物体的表达方式是合理的。

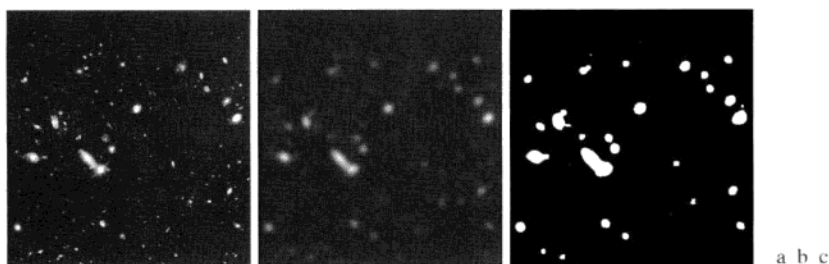


图 3.34 (a) 来自哈勃太空望远镜的大小为 528×485 像素的图像; (b) 由 15×15 均值模板滤波过的图像; (c) 对图 (b) 进行阈值处理后的结果(原图像由 NASA 提供)

3.5.2 统计排序(非线性)滤波器

统计排序滤波器是一种非线性空间滤波器,这种滤波器的响应以滤波器包围的图像区域中所包含的像素的排序(排队)为基础,然后使用统计排序结果决定的值代替中心像素的值。这一类中最知名的滤波器是中值滤波器,正如其名暗示的那样,它是将像素邻域内灰度的中值(在中值计算中包括原像素值)代替该像素的值。中值滤波器的使用非常普遍,这是因为对于一定类型的随机噪声,它提供了一种优秀的去噪能力,而且比相同尺寸的线性平滑滤波器的模糊程度明显要低。中值滤波器对处理脉冲噪声非常有效,该种噪声也称为椒盐噪声,因为这种噪声是以黑白点的形式叠加在图像上的。

一个数值集合的中值 ξ 是这样的数值,即数值集合中有一半小于或等于 ξ , 还有一半大于或等于 ξ 。为了对一幅图像上的某个点进行中值滤波处理,首先将邻域内的像素分类排序,确定其中值,并将中值赋予滤波后图像中的相应像素点。例如,对于一个 3×3 邻域,其中值是第 5 个最大的值,而在一个 5×5 邻域中,中值就是第 13 个最大的值,等等。当一个邻域中的一些像素值相同时,所有相等的值都可以作为中值。假如,在一个 3×3 邻域内有一系列像素值(10, 20, 20, 20, 15, 20, 20, 25, 100),对这些值排序后为(10, 15, 20, 20, 20, 20, 20, 25, 100),那么其中值就是 20。这样,中值滤波器的主要功能是使拥有不同灰度的点看起来更接近于它的相邻点。事实上,我们使用 $m \times m$ 中值滤波器来去除那些相对于其邻域像素更亮或更暗并且其区域小于 $m^2/2$ (滤波器区域的一半)的孤立像素族。在这种情况下,“去除”的意思是强制为邻域的中值灰度。较大的族所受到的影响明显较小。

在图像处理中,尽管中值滤波器是使用得最为广泛的统计排序滤波器,但并不意味着它是唯一的。中值象征一系列像素值排序后的第 50% 个值,但根据基本统计学可知,排序也适用于其他不同的情况。例如,可以取第 100% 个值,即所谓的最大值滤波器,这种滤波器在搜寻一幅图像中的最亮点时非常有用。一个 3×3 的最大值滤波器的响应可以由公式 $R = \max \{z_k \mid k = 1, 2, \dots, 9\}$ 给出。相反,取第 0% 个值的滤波器就是所谓的最小值滤波器,它可用于相反的目的。中值、最大值、最小值和其他非线性滤波器将在 5.3 节中详细介绍。

关于百分比的内容,请参阅 10.3.5 节。

例 3.14 利用中值滤波降噪。

图 3.35(a) 显示了一幅被椒盐噪声污染的电路板的 X 射线图像。为了说明这种情况下的中值滤波器处理效果比均值滤波器更好。我们在图 3.35(b) 中显示了用 3×3 邻域均值模板处理噪声图像的结果,而在图 3.35(c) 中显示了用 3×3 中值滤波器处理噪声图像的结果。均值滤波模糊了图像,并且噪声去除性能也很差。在这种情况下,中值滤波要远远优于均值滤波是很明显的。通常,中值滤波比均值滤波更适合去除椒盐噪声。

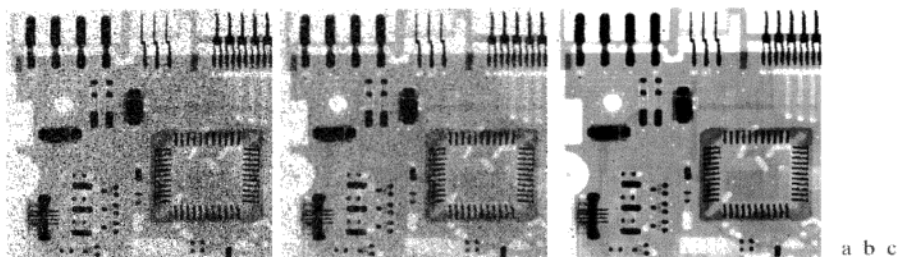


图 3.35 (a)被椒盐噪声污染的电路板 X 射线图像；(b)用 3×3 均值模板降噪后的图像；(c)用 3×3 中值滤波器降噪后的图像(原图像由 Lixi 公司的 Joseph E. Pascente 先生提供)

3.6 锐化空间滤波器

锐化处理的主要目的是突出灰度的过渡部分。图像锐化的用途多种多样，应用范围从电子印刷和医学成像到工业检测和军事系统的制导等。在上一节中，我们了解到，图像模糊可通过在空间域用像素邻域平均法实现。因为均值处理与积分类似，在逻辑上，我们可以得出锐化处理可由空间微分来实现这一结论。事实上，的确如此，且本节将讨论由数字微分来定义和实现锐化算子的各种方法。基本上，微分算子的响应强度与图像在用算子操作的这一点的突变程度成正比，这样，图像微分增强边缘和其他突变(如噪声)，而削弱灰度变化缓慢的区域。

3.6.1 基础

在以下两节中，我们将分别详细讨论基于一阶和二阶微分的锐化滤波器。在讨论具体滤波器之前，我们先回顾一下数字意义上微分的某些基本性质。为简化说明，我们主要集中讨论一阶微分的性质。我们最感兴趣的是恒定灰度区域中，突变的开始点与结束点(台阶和斜坡突变)及沿着灰度斜坡处的微分性质。正如您将在第 10 章看到的那样，这些类型的突变可以用来对图像中的噪声点、线与边缘建模。这些图像特性过渡期的微分性质也很重要。

数字函数的微分可以用不同的术语定义。也有各种方法定义这些差别。然而，对于一阶微分的任何定义都必须保证以下几点：(1)在恒定灰度区域的微分值为零；(2)在灰度台阶或斜坡处微分值非零；(3)沿着斜坡的微分值非零。类似地，任何二阶微分的定义必须保证以下几点：(1)在恒定区域微分值为零；(2)在灰度台阶或斜坡的起点处微分值非零；(3)沿着斜坡的微分值非零。因为我们处理的是数字量，其值是有限的，故最大灰度级的变化也是有限的，并且变化发生的最短距离是在两相邻像素之间。

对于一维函数 $f(x)$ ，其一阶微分的基本定义是差值

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x) \quad (3.6-1)$$

在 10.2.1 节中，我们将会回到式 (3.6-1)，并给出由泰勒级数推导出它的方法。现在，我们只须把它当做一定义来接受即可。

其中，为了与二维图像函数 $f(x, y)$ 的微分保持一致，我们使用了偏导数符号。对于二维函数，我们将沿着两个空间轴处理偏微分。当前讨论的空间微分的应用并不影响我们试图采用的任何方法的本质。很清楚，当函数中只有一个变量时， $\partial f / \partial x = df / dx$ ；对于二阶微分，这同样也成立。

我们将二阶微分定义为如下差分：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \quad (3.6-2)$$

很容易验证这两个定义满足前面所说的条件。为了解这一点，并考察数字函数一阶和二阶微分间的异同点，考虑图 3.36 中的例子。

图 3.36 (b) (图的中间) 显示了一段扫描线。小方块中的数值是扫描线中的灰度值，它们作为黑点画在上方的图 3.36 (a) 中。用虚线连接这些点是为了帮助我们看得更清楚。正如图中所示，扫描线包含一个灰度斜坡、三个恒定灰度段和一个灰度台阶。圆圈指出了灰度变化的起点和终点。用前面两个定义计算出的图 3.36 (b) 中扫描线的一阶微分和二阶微分画在图 3.36 (c) 中。当在点 x 处计算一阶微分时，我们用下一个点的函数值减去该点的函数值。因此，这是一个“预测未来”的操作。类似地，为了在 x 点计算二阶微分，在计算中我们使用前一个点和下一个点。为了避免前一个点和下一个点处于扫描线之外的情况，我们在图 3.36 中显示了从序列中第二个点到倒数第二个点的微分计算。

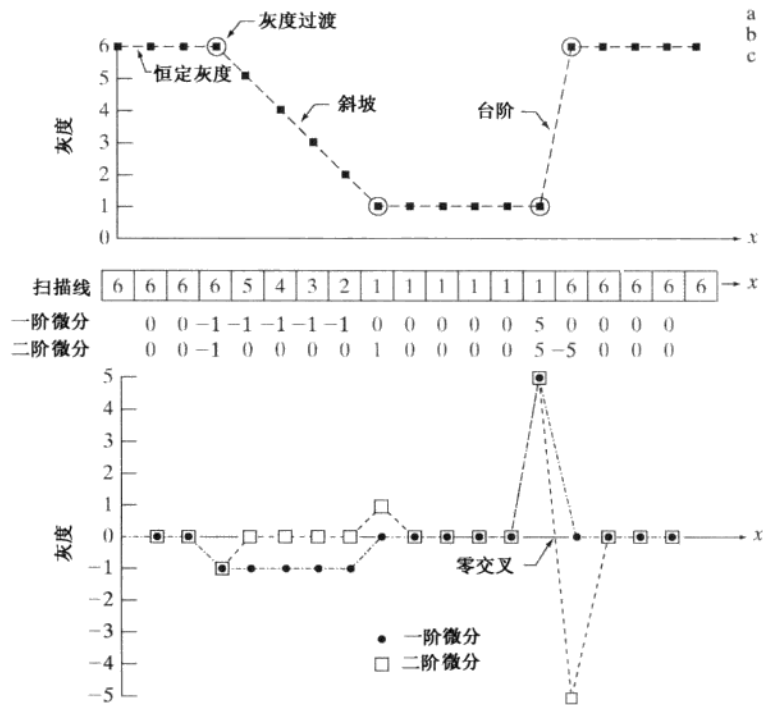


图 3.36 表示一幅图像中一段水平灰度剖面的一维数字函数的一阶微分和二阶微分的说明。在图 (a) 和图 (c) 中，为便于观看，已用虚线将数据点连接起来

让我们从左到右横贯剖面图，考虑一阶微分和二阶微分的性质。首先，我们遇到的是如图 3.36 (b) 和 (c) 所示的恒定灰度区域，一阶微分和二阶微分都是零，因此，两者都满足条件 (1)。接着，我们遇到紧随台阶的一个灰度斜坡，并且我们注意到在斜坡起点和台阶处的一阶微分不为零，类似地，在斜坡和台阶的起点和终点的二阶微分也不为零；因此，两个微分特性都满足条件 (2)。最后，我们看到，两个微分特性也都满足条件 (3)，因为对于斜坡来说一阶微分不是零，二阶微分是零。请注意斜坡或台阶的起点和终点处二阶微分的符号变化。事实上，我们在图 3.36 (c) 中看到，在一个台阶的过渡中，连接这两个值的线段在两个端点的中间与水平轴相交。正如在第 10 章中我们将看到的那样，零交叉对于边缘定位是非常有用的。

数字图像中的边缘在灰度上常常类似于斜坡过渡，这样就导致图像的一阶微分产生较粗的边缘，因为沿着斜坡的微分非零。另一方面，二阶微分产生由零分开的一个像素宽的双边缘。由此，我们

得出结论,二阶微分在增强细节方面要比一阶微分好得多,这是一个适合锐化图像的理想特性。正像在本节稍后将要了解的那样,二阶微分比一阶微分执行上要容易得多,所以,我们开始主要注意二阶微分。

3.6.2 使用二阶微分进行图像锐化——拉普拉斯算子

在这一节,我们考虑二维函数二阶微分的实现及其在图像锐化处理中的应用。在第10章中,我们将再回到微分问题上来,在第10章我们将把它广泛用于图像分割。这种方法基本上是由定义一个二阶微分的离散公式,然后构造一个基于该公式的滤波器模板组成的。我们最关注的是一种各向同性滤波器,这种滤波器的响应与滤波器作用的图像的突变方向无关。也就是说,各向同性滤波器是旋转不变的,即将原图像旋转后进行滤波处理给出的结果与先对图像滤波然后再旋转的结果相同。

可以证明(Rosenfeld and Kak[1982]),最简单的各向同性微分算子是拉普拉斯算子。一个二维图像函数 $f(x, y)$ 的拉普拉斯算子定义为

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (3.6-3)$$

因为任意阶微分都是线性操作,所以拉普拉斯变换也是一个线性算子。为了以离散形式描述这一公式,我们使用式(3.6-2)的定义,记住,我们必须支持第二个变量。在 x 方向上,我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y) \quad (3.6-4)$$

类似地,在 y 方向上我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y) \quad (3.6-5)$$

所以,遵循这三个公式,两个变量的离散拉普拉斯算子是

$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y) \quad (3.6-6)$$

这个公式可以用图3.37(a)的滤波模板来实现,该图给出了以 90° 为增量进行旋转的一个各向同性结果。实现机理与3.5.1节中给出的线性平滑滤波器一样。我们在这里只是简单地使用了不同的系数。

对角线方向也可以这样组成:在数字拉普拉斯变换的定义中,在式(3.6-6)中添入两项,即两个对角线方向各加一个。每个新添加项的形式与式(3.6-4)或式(3.6-5)类似,只是其坐标轴的方向沿着对角线方向。由于每个对角线方向上的项还包含一个 $-2f(x, y)$,所以现在从不同方向的项中总共应减去 $-8f(x, y)$ 。图3.37(b)显示了执行这一新定义的模板。这种模板对 45° 增幅的结果是各向同性的。您在实践中可能常见图3.37(c)和(d)所示的拉普拉斯模板。它们是由我们在式(3.6-4)和式(3.6-5)中用过的二阶微分的定义得到的,只是其中的1是负的。正因为如此,它们产生了等效的结果,但是,当将拉普拉斯滤波后的图像与其他图像合并(相加或相减)时,必须考虑符号上的差别。

由于拉普拉斯是一种微分算子,因此其应用强调的是图像中灰度的突变,并不强调灰度级缓慢变化的区域。这将产生把浅灰色边线和突变点叠加到暗色背景中的图像。将原图像和拉普拉斯图像叠加在一起的简单方法,可以复原背景特性并保持拉普拉斯锐化处理的效果。正如上一段中讲到的那样,记住所使用的拉普拉斯定义是很重要的。如果所使用的定义具有负的中心系数,那么必须将原图像减去经拉普拉斯变换后的图像而不是加上它,从而得到锐化结果。所以,我们使用拉普拉斯对图像增强的基本方法可表示为下式:

$$g(x,y)=f(x,y)+c\left[\nabla^2f(x,y)\right]$$

(3.6-7)

其中， $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 分别是输入图像和锐化后的图像。如果使用图 3.37(a)或图 3.37(b)中的拉普拉斯滤波器，则常数 $c=-1$ ，如果使用另外两个滤波器，则常数 $c=1$ 。

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

a b c d

图 3.37 (a)实现式(3.6-6)所用的滤波器模板；(b)用于实现带有对角项的该公式的扩展的模板；(c)~(d)实践中常用的其他两个拉普拉斯实现

例 3.15 使用拉普拉斯的图像锐化。

图 3.38(a)显示了一幅月球北极的稍微模糊的图像。图 3.38(b)显示了使用图 3.37(b)中的拉普拉斯模板对该图像滤波后的结果。由于拉普拉斯图像中既有正值又有负值，并且所有负值在显示时都修剪为 0，所以图像的大部分是黑色的。

一个典型的标定拉普拉斯图像的方法是对它的最小值加一个新的代替 0 的最小值，然后将结果标定到整个灰度范围 $[0, L-1]$ 内，如同式(2.6-10)和式(2.6-11)中解释的那样。图 3.38(c)是用这种方法标定过的图像。注意，该图像的支配特性是边缘和灰度的不连续处。前述的黑色背景由于标定现在已变成灰色。这一呈现浅灰色的外观是被适当标定的典型拉普拉斯图像。图 3.38(d)显示了在 $c=-1$ 时使用式(3.6-7)得到的结果。该图像的细节比原图像更清晰。将原图像加到拉普拉斯的处理结果中，可以使图像中的各灰度值得到复原，而且通过拉普拉斯增强了图像中灰度突变处的对比度。最终结果是使图像中的细节部分得到了增强，并良好地保留了图像的背景色调。最后，图 3.38(e)显示了使用图 3.37(b)中的滤波器重复前述过程处理的结果。在这里，我们注意到图 3.38(d)的清晰度的重要改进。因为使用了图 3.37(b)的滤波器导致在对角方向上产生了额外的区别(锐化)，这并不意外。像图 3.38(d)和图 3.38(e)显示的这些结果使得拉普拉斯成为锐化数字图像的一种工具。

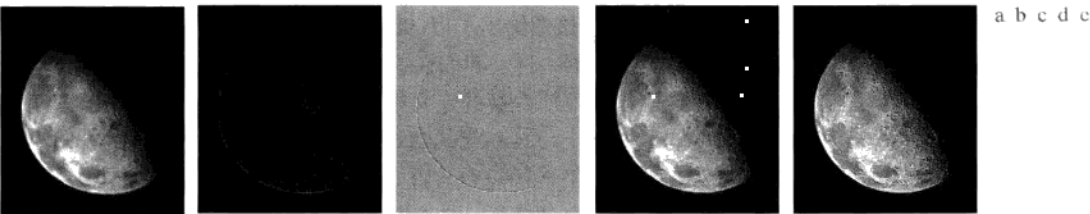


图 3.38 (a)月球北极的模糊图像；(b)未标定的拉普拉斯滤波后的图像；(c)标定的拉普拉斯滤波后的图像；(d)用图 3.37(a)中的模板锐化后的图像；(e)用图 3.37(b)中的模板锐化后的图像(原图像由 NASA 提供)

3.6.3 非锐化掩蔽和高提升滤波

在印刷和出版界已用了多年的图像锐化处理过程是从原图像中减去一幅非锐化(平滑过的)版本。这个称为非锐化掩蔽的处理过程由下列步骤组成：

1. 模糊原图像。

2. 从原图像中减去模糊图像(产生的差值图像称为模板)。

3. 将模板加到原图像上。

令 $\bar{f}(x, y)$ 表示模糊图像, 非锐化掩蔽以公式形式描述如下。首先, 我们得到模板:

$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y) \quad (3.6-8)$$

然后, 在原图像上加上该模板的一个权重部分:

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y) \quad (3.6-9)$$

通常, 我们会在式(3.6-9)中包含一个权重系数 $k (k \geq 0)$ 。当 $k = 1$ 时, 我们得到上面定义的非锐化掩蔽。当 $k > 1$ 时, 该处理称为高提升滤波。选择 $k < 1$ 则不强调非锐化模板的贡献。

图3.39 解释了非锐化掩蔽是如何工作的。图3.39(a)中的灰度剖面图可以解释为通过垂直边缘的水平扫描线, 垂直边缘是图像中从暗区到亮区的过渡。图3.39(b)显示了平滑后的结果, 为了参考, 该结果叠加在原始信号(显示为虚线)上。图3.39(c)是非锐化模板, 它是从原始信号中减去模糊信号得到的。通过将该结果与对应于图3.36(a)中斜坡的图3.36(c)中的部分比较, 我们注意到, 图3.39(c)中的非锐化模板与我们使用二阶微分得到的结果非常相似。图3.39(d)是最后锐化的结果, 它是通过把模板加到原始信号上得到的。现在强调(锐化)了信号中出现灰度斜率变化的点。观察添加到原信号中的负值。这样, 如果原图像有任何零值, 或如果选择的 k 值大到足以使模板峰值大于原信号中的最小值时, 那么最终的结果可能会存在负灰度。负值将导致边缘周围有暗的晕轮, 如果 k 足够大, 将产生不好的结果。

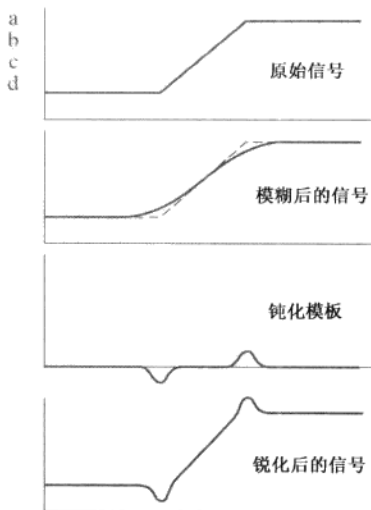


图3.39 非锐化掩蔽机理的说明: (a)原始信号; (b)模糊信号, 为便于参考, 原始信号使用虚线显示; (c)非锐化模板; (d)将图(c)和图(a)相加得到的锐化后的信号

例 3.16 使用非锐化掩蔽进行图像锐化。

图3.40(a)显示了一幅在暗灰背景上稍微有点模糊的白文本图像。图3.40(b)是使用大小为 5×5 且 $\sigma = 3$ 的高斯平滑滤波器得到的结果(见3.4.4节)。图3.40(c)是使用式(3.6-8)得到的非锐化模板。图3.40(d)是用[式(3.6-9), $k = 1$]非锐化模板得到的结果。该图像较原图像稍微有点改进, 但是, 我们可以做得更好。图3.40(e)显示了使用式(3.6-9)并且令 $k = 4.5$ 的结果, 这是我们可用的最大可能值, 并且在最终结果中始终保持所有值为正。该图像与原图像相比有重大的改进。



图3.40 (a)原图像; (b)使用高斯滤波器模糊的结果; (c)非锐化模板; (d)使用非锐化掩蔽的结果; (e)使用高提升滤波的结果

3.6.4 使用一阶微分对(非线性)图像锐化——梯度

图像处理中的一阶微分是用梯度幅值来实现的。对于函数 $f(x, y)$, f 在坐标 (x, y) 处的梯度定义为二维列向量

$$\nabla f \equiv \text{grad}(f) \equiv \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.6-10)$$

10.2.5 节将详细讨论梯度。这里, 我们仅对使用梯度幅值锐化图像感兴趣。

该向量具有重要的几何特性, 即它指出了在位置 (x, y) 处 f 的最大变化率的方向。

向量 ∇f 的幅度值(长度)表示为 $M(x, y)$, 即

$$M(x, y) = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \quad (3.6-11)$$

它是梯度向量方向变化率在 (x, y) 处的值。注意, $M(x, y)$ 是与原图像大小相同的图像, 它是当 x 和 y 允许在 f 中的所有像素位置变化时产生的。在实践中, 该图像通常称为梯度图像(或含义很清楚时, 可简称为梯度)。

因为梯度向量的分量是微分, 所以它们是线性算子。然而, 该向量的幅度不是线性算子, 因为求幅度是做平方和平方根操作。另一方面, 式(3.6-10)中的偏微分不是旋转不变的(各向同性), 而梯度向量的幅度是旋转不变的。在某些实现中, 用绝对值来近似平方和平方根操作更适合计算:

$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y| \quad (3.6-12)$$

该表达式仍保留了灰度的相对变化, 但是通常各向同性特性丢失了。然而, 像拉普拉斯的情况那样, 在下面章节定义的离散梯度的各向同性仅仅在有限旋转增量的情况下被保留了, 它依赖于所用的近似微分的滤波器模板。正如结果那样, 用于近似梯度的最常用模板在 90° 的倍数时是各向同性的。这些结果与我们使用式(3.6-11)还是使用式(3.6-12)无关, 因此, 如果我们选择这样做, 使用任一公式对结果并无影响。

正如在拉普拉斯情况下那样, 我们现在对前面的公式定义一个离散近似, 并由此形成合适的滤波模板。为简化下面的讨论, 我们将使用图 3.41 (a) 中的符号来表示一个 3×3 区域内图像点的灰度。例如, 使用图 3.28 中引入的符号, 令中心点 z_5 表示任意位置 (x, y) 处的 $f(x, y)$; z_1 表示为 $f(x-1, y-1)$; 等等。正如 3.6.1 节指出的那样, 满足 3.6.1 节声明的条件的对一阶微分的最简近似是 $g_x = (z_8 - z_5)$ 和 $g_y = (z_6 - z_5)$ 。在早期数字图像处理的研究中, 由 Roberts[1965]提出的其他两个定义使用交叉差分:

$$g_x = (z_9 - z_5) \text{ 和 } g_y = (z_8 - z_6) \quad (3.6-13)$$

如果我们使用式(3.6-11)和式(3.6-13), 我们计算梯度图像为

$$M(x, y) = [(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2]^{1/2} \quad (3.6-14)$$

如果我们用式(3.6-12)和式(3.6-13), 则

$$M(x, y) \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6| \quad (3.6-15)$$

按之前的描述方式, 很容易理解 x 和 y 会随图像的维数变化。式(3.6-13)中所需的偏微分项可以用图 3.41 (b) 中的两个线性滤波器模板来实现。这些模板称为罗伯特交叉梯度算子。

偶数尺寸的模板很难实现, 因为它们没有对称中心。我们感兴趣的最小模板是 3×3 模板。使用以 z_5 为中心的一个 3×3 邻域对 g_x 和 g_y 的近似如下式所示:

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3) \quad (3.6-16)$$

和

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7) \quad (3.6-17)$$

这两个公式可以使用图 3.41 (d) 和图 3.41 (e) 中的模板来实现。使用图 3.41 (d) 中的模板实现的 3×3 图像区域的第三行和第一行的差近似 x 方向的偏微分, 另一个模板中的第三列和第一列的差近似了 y 方向的微分。用这些模板计算偏微分之后, 我们就得到了之前所说的梯度幅值。例如, 将 g_x 和 g_y 代

入式(3.6-12)得到

$$M(x, y) \approx |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)| \quad (3.6-18)$$

图3.41(d)和图3.41(e)中的模板称为 Sobel 算子。中心系数使用权重 2 的思想是通过突出中心点的作用而达到平滑的目的(第10章中将详细介绍该思想)。注意,图3.41所示的所有模板中的系数总和为 0,这正如微分算子的期望值那样,表明灰度恒定区域的响应为 0。

a b c d e														
z_1						-1			-2	-1	-1	0	1	
z_4			-1		0	0		-1	0	0	0	-2	0	2
z_7			0		1	1		0	1	2	1	-1	0	1

图 3.41 (a)一幅图像的 3×3 区域(z 是灰度值);(b)~(c)罗伯特交叉梯度算子;(d)~(e)所有的模板系数之和为零,如微分算子预料的那样

正如之前提到的那样, g_x 和 g_y 的计算是线性操作,因为它们涉及微分操作,因此可以使用图3.41中的空间模板如乘积求和那样实现。使用梯度进行非线性锐化是包括平方和平方根的 $M(x, y)$ 的计算,或者使用绝对值计算代替,所有这些计算都是非线性操作。该操作是在得到 g_x 和 g_y 线性操作后执行的操作。

例 3.17 使用梯度进行边缘增强。

梯度处理经常用于工业检测,不是辅助人工检测产品缺陷,就是更为通用地作为自动检测的预处理。我们将在第10章和第11章对此做更多的介绍。考虑一个简单的例子来展示梯度法如何用于增强缺陷并消除慢变化背景的特性是有益的。在这个例子中,增强用做自动检测的预处理步骤,而不用于人分析。

图3.42(a)显示了一幅隐形眼镜的光学图像,

它由设计用于突出缺陷的发光装置来照明,例如4点钟方向和5点钟方向眼镜边界中的两个边缘缺陷。图3.42(b)显示了使用式(3.6-12)及图3.41(d)与图3.41(e)中的两个 Sobel 模板得到的梯度图像。在该图像中,边缘缺陷清晰可见,并且还有一个附加的优点,即灰度不变或变化缓慢的图案阴影被去除了,从而简化了自动检测所要求的计算任务。梯度处理还可以用于突出灰度图像中看不见的小斑点(这样的小斑点可能是外来物、保护液中的气泡或眼镜中的小缺陷)。在灰度平坦区域中增强小突变的能力是梯度处理的另一个重要特性。

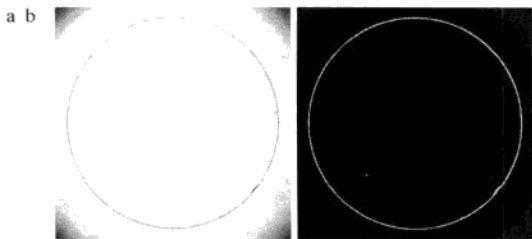


图 3.42 (a)隐形眼镜的光学图像(注意4点钟和5点钟方向边界上的缺陷);(b)Sobel 梯度(原图像由 Perceptics 公司的 Pete Sites 提供)

3.7 混合空间增强法

到目前为止,除了一些特殊情况,如带有阈值处理(图3.34)的混合模糊,我们主要关注的还是单一的增强法。通常,为了达到令人满意的结果,对给定的任务需要应用多种互补的图像增强技术。在本节,我们将通过一个例子来说明怎样将本章中提到的多种图像增强方法结合起来,从而完成困难的图像增强任务。

图 3.43(a) 所示的图像是一幅人体骨骼核扫描图像，常用于检查人体疾病，如骨骼感染和肿瘤。我们的目的是通过图像锐化突出骨骼的更多细节来增强图像。由于图像灰度的动态范围很窄并且有很高的噪声内容，所以很难对其进行增强。对此我们采取的策略是，首先用拉普拉斯法突出图像中的小细节，然后用梯度法突出其边缘。平滑过的梯度图像将用于掩蔽拉普拉斯图像(关于掩蔽的说明见图 2.30)，稍后会对此简短说明。最后，我们将试图使用灰度变换来增大图像的灰度动态范围。

图 3.43(b) 显示了使用图 3.37(d) 中的滤波器得到的原图像的拉普拉斯操作的结果。该图像使用与图 3.38(c) 相同的技术标定过(只为便于显示)。然后，根据式 (3.6-7)，简单地将图 3.43(a) 与图 3.43(b) 相加就可以得到一幅经过锐化过的图像。只要看一下图 3.43(b) 中的噪声水平，就可以预料到，如果将图 3.43(a) 和图 3.43(b) 相加，会导致相当多的噪声，这一点可以在图 3.43(c) 中得到证实。于是可立刻想到，降低噪声的一种方法是使用中值滤波器。然而，中值滤波器是一种非线性滤波器，它有可能改变图像的性质。这在医学图像处理中是不能接受的。

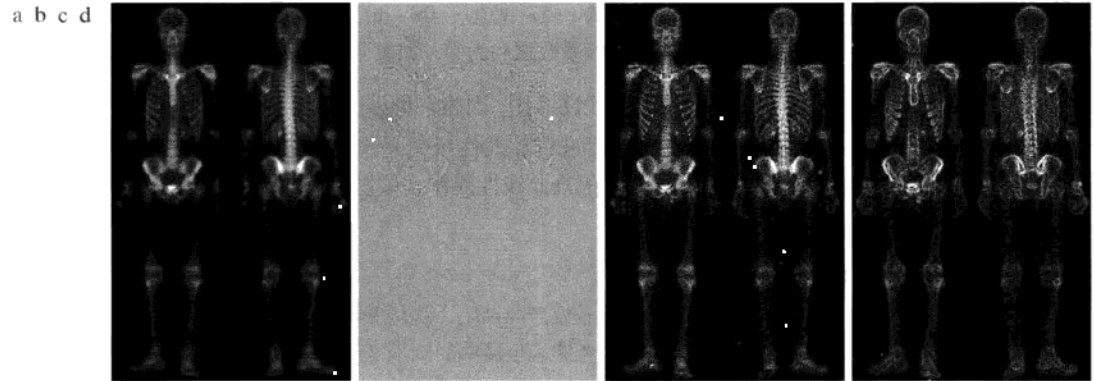


图 3.43 (a) 全身骨骼扫描图像; (b) 图(a)经拉普拉斯操作后的结果; (c) 将图(a)和图(b)相加得到的锐化图像; (d) 图(a)经 Sobel 梯度处理后的结果

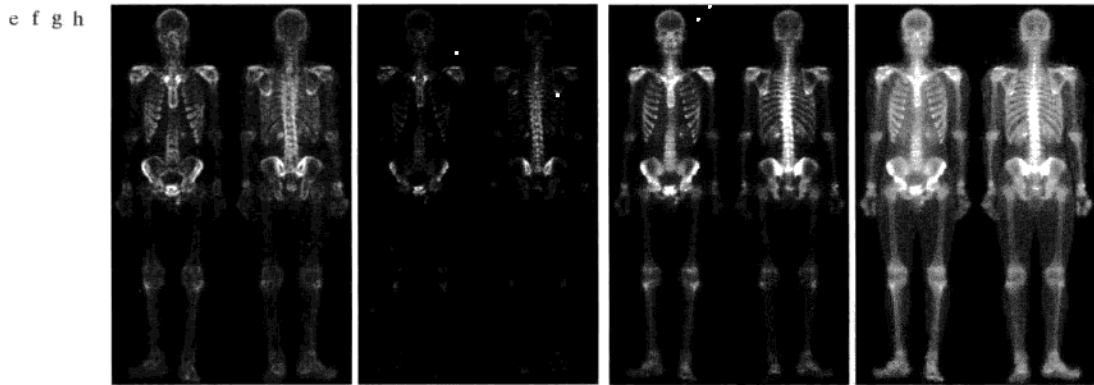


图 3.43(续) (e) 使用 5×5 均值滤波器平滑后的 Sobel 图像; (f) 由图(c)和图(e)相乘形成的掩蔽图像; (g) 由图(a)和图(f)求和得到的锐化后的图像; (h) 对图(g)应用幂律变换得到的最终结果。请将图(g)与图(a)比较(原图像由 G. E. Medical Systems 公司提供)

另一种方法是使用原图像梯度操作的平滑形式所形成的一个模板。这种方法的动机很直接，并且基于 3.6.1 节中讲过的一阶和二阶微分的性质。拉普拉斯操作作为一种二阶微分算子，在图像细节的增强处理方面有一定的优点，在增强细节方面它是最好的。但这会导致它产生比梯度操作更多的噪

声。这些噪声在平滑区内域更令人讨厌,因为在这些区域它非常显眼。梯度变换在灰度变化的区域(灰度斜坡或台阶)的平均响应要比拉普拉斯操作的平均响应更强烈。梯度操作对噪声和小细节的响应要比拉普拉斯操作的响应弱,而且可以通过均值滤波器对其进行平滑处理而进一步降低。这时,其思路是对梯度图像进行平滑处理并用拉普拉斯图像与它相乘。在这种情况下,可以将平滑后的梯度图像看成是一个模板图像。乘积会保留灰度变化强烈区域的细节,同时降低灰度变化相对平坦区域的噪声。这种处理可以粗略地看成是将拉普拉斯操作与梯度操作的优点相结合。将结果加到原图像上,就可以得到最终的锐化图像。

图3.43(d)显示了原图像使用式(3.6-12)给出的 Sobel 梯度操作的结果。分量 g_x 和 g_y 分别使用图 3.41(d)和图 3.41(e)中的模板获得。正如所期望的那样,该图像中的边缘要比拉普拉斯图像中的边缘突出许多。图 3.43(e)中平滑后的梯度图像是使用大小为 5×5 的一个均值滤波器得到的。为便于显示,两幅梯度图像已与拉普拉斯图像相同的方式进行了标定。因为梯度图像的最小可能值是 0,故标定后的梯度图像中背景是黑色的,而不是标定后的拉普拉斯图像中的灰色。图3.43(d)和图3.43(e)比图 3.43(b)亮的事实再次表明,具有重要边缘内容的梯度图像的值一般要比拉普拉斯图像的值高。

拉普拉斯图像与平滑后的梯度图像的乘积显示在图 3.43(f)中。注意强边缘的优势和可见噪声的相对减少,这是使用一幅平滑后的梯度图像来掩蔽拉普拉斯图像的关键目的。将乘积图像与原图像相加就产生了图3.43(g)所示的锐化图像。与原图像相比,该图像中大部分细节的清晰度的增加都很明显,包括肋骨、脊椎骨、骨盆及颅骨。单独使用拉普拉斯操作或者梯度操作不可能达到这种类型的改进。

以上讨论的锐化过程从感知方法上没有影响图像灰度的动态范围。这样,增强处理任务的最后一步就是增大锐化后图像的动态范围。正如 3.2 节和 3.3 节中详细讨论的那样,有很多可以完成这一目标的灰度变换函数。从 3.3.2 节的结果可以知道,对类似此处灰度分布比较暗的图像进行直方图均衡的效果似乎并不好。直方图规定化可能是一种解决方法,但待处理图像的暗特性用幂律变换处理更好。由于我们希望能够扩展灰度范围,所以式(3.2-3)中的 γ 值必须小于 1。通过用这一公式进行一些实验后,我们得到了图 3.43(h)所示的结果,此时 $\gamma = 0.5$, $c = 1$ 。将这幅图像与图 3.43(g)相比较,我们可以看到图 3.43(h)中出现了许多重要的新细节。围绕着手腕、手掌、脚踝和脚掌区域都是这种效果的很好例子。人体的整个骨架结构也很显著,包括手臂骨和腿骨。我们还注意到,人体轮廓及人体组织的清晰度不高,这是由于通过扩大灰度动态范围显现细节的同时也增大了噪声,但图 3.43(h)与原图像相比还是显示出了视觉效果的显著改进。

刚才讨论的方法是有代表性的处理形式,为了达到那些用一种方法无法实现的效果,可以把多种方法结合起来。得到期望结果所使用的方法取决于应用。在这个例子中,所示图像类型的最终用户很可能是放射线学者。但也存在超出我们讨论范围的多数原因,如物理学家就不依赖于增强的结果来达到诊断目的。然而,如果将突出一些细节作为进一步分析一幅原图像或一系列图像的线索,则增强后的图像是非常有用的。而在其他领域,增强处理后的结果可能就是最终的“产品”。在印刷工业、基于图像的产品检测、法院取证、显微、监视及其许多他领域,增强的主要目的是得到一幅具有较高视觉细节内容的图像。

3.8 使用模糊技术进行灰度变换和空间滤波

我们以介绍模糊集合及其在灰度变换和空间滤波中的应用来结束本章,灰度变换和空间滤波是前几节探讨的主题。正如它所证明的那样,这两种应用是图像处理中最常使用模糊技术的领域。在本章最后的参考文献提供了关于模糊集和模糊集在图像处理中的应用方面的切入点。如在下面的讨论中您将看到的那样,模糊集合在解决那些不以精确概念为基础来表述的问题时,为体现人类知识提供了一个框架。

3.8.1 引言

如 2.6.4 节注释的那样,一个集合是对象(元素)的聚集,集合论是处理集合中操作的工具集。与数学逻辑一样,集合论理所当然也是经典数学的基础之一。集合论的核心是集合成员的概念。我们习惯于处理所谓的“干脆的”集合,它们的成员在传统的二值布尔逻辑情况下,不是真就是假,用 1 表示真,用 0 表示假。例如,令 Z 表示为所有人员的集合,并且我们想要定义集合 Z 的一个称为年轻人集合的子集 A 。为了形成该子集,我们需要定义一个隶属度函数,它可以对 Z 中的每一个成员 z 赋一个 1 值或 0 值。因为我们处理二值逻辑,隶属度函数简单地定义一个阈值,等于或低于该阈值的人考虑为年轻人,而在阈值之上的人考虑为非年轻人。图 3.44(a)用 20 岁的年龄阈值总结了这一概念,并令 $\mu_A(z)$ 表示刚才讨论的隶属度函数。

隶属度函数也称为特征函数。

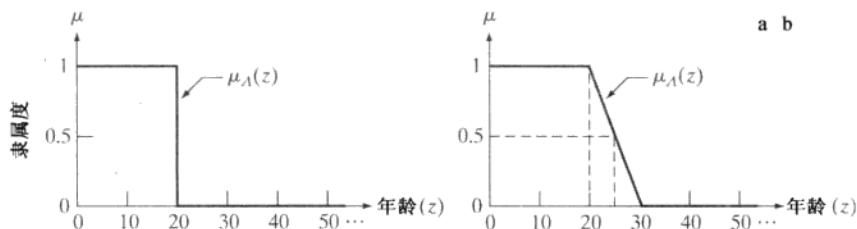


图 3.44 用于产生(a)一个“干脆的”集合和(b)一个模糊集合的隶属度函数

使用这一表达,我们立即会面临一个困难:年龄为 20 岁的人被认为是年轻人,但年龄为 20 岁零 1 秒的人就不是年轻人集合的成员。这是使用“干脆的”集合的一个基本问题,它在许多实际应用中限制了经典集合论的用途。

我们需要的所谓年轻的意思是更弹性地在年轻和非年轻间的渐进过渡。图 3.44(b)显示了一种可能性。该函数的关键特性是无限制的评价,这样就可在年轻和非年轻之间允许连续地过渡。这就使得它可能有“年轻”的程度。现在我们可以做一个声明:如一个人是年轻人(曲线上端的平坦部分),相对年轻的人(斜坡开始处),50%年轻的人(斜坡的中间),不那么年轻的人(斜坡的末端),等等[注意图 3.44(b)中曲线的斜率引入了什么是“年轻”的更加模糊的概念]。这些模糊的声明与我们不太严密地谈论年龄时是一致的。这样,我们可以用模糊逻辑基础解释非限制评价隶属度函数,并且把使用它们生成的集合看成是模糊集合。这些概念将在下一节中被形式化。

3.8.2 模糊集合论原理

模糊集合论是由 L. A. Zadeh 在 40 多年前的一篇论文中引入的(Zadeh[1965])。如下面的讨论那样,模糊集合为处理不严密信息提供了一种形式。

定义

令 Z 为元素(对象)集, z 表示 Z 的一类元素,即 $Z = \{z\}$ 。该集合称为论域。 Z 中的模糊集合^① A 由隶属度函数 $\mu_A(z)$ 表征,它是与 Z 的元素相关的在区间 $[0, 1]$ 内的一个实数。 $\mu_A(z)$ 在 z 处的值表示 A 中 z 的隶属度等级。最接近 $\mu_A(z)$ 的值与在 A 中的 z 的较高的隶属度等级趋于一致,而当 $\mu_A(z)$ 接近于 0 时,则相反。“属于”这个概念在普通集合中很熟悉,但在模糊集合论中却具有不同的含义。对于普通集合,我们说一个元素属于或

为表达给定应用中集合的广泛性,我们采用传统的模糊集合表示法,即集合符号 Z 而不是更为传统的集合符号 U 。

① 文献中也使用术语模糊子集来表示 A 是 Z 的子集,但模糊集合使用得更为频繁。

不属于一个集合；而对于模糊集合，我们说对于 $\mu_A(z)=1$ 的所有 z 都是集合的完全成员，对于 $\mu_A(z)=0$ 的所有 z 都不是集合的成员，而 $\mu_A(z)$ 的值介于 0 和 1 之间的所有 z 是集合的部分成员。因此，模糊集合是一个由 z 值和(赋予 z 成员等级的)相应隶属度函数组成的序对，即

$$A = \{z, \mu_A(z) \mid z \in Z\} \quad (3.8-1)$$

当变量连续的时候，该式中集合 A 有无限个元素。当 z 的值是离散值时，我们可明确地说明 A 的元素。例如，如果图 3.44 中的年龄增量限制为整数年，则有

$$A = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (20, 1), (21, 0.9), (22, 0.8), \dots, (25, 0.5), (24, 0.4), \dots, (29, 0.1)\}$$

这里，作为一个例子，元素 (22, 0.8) 表示年龄 22 在集合中的隶属度等级为 0.8。年龄为 20 岁和低于 20 岁的所有成员都是该集合的完全成员，而年龄为 30 岁和高于 30 岁的成员都不是集合的成员。注意，该集合的曲线是图 3.44 (b) 中曲线上的离散点，所以 $\mu_A(z)$ 完全定义了 A 。从另一角度观察，我们发现一个(离散)模糊集合只不过是一个函数的点的集合，该函数将问题域(论域)中的每个元素映射为一个大于 0 而小于或等于 1 的数。这样，我们通常可以交替使用术语模糊集合和隶属度函数。

当 $\mu_A(z)$ 仅有两个值时，例如 0 和 1，隶属度函数退化为我们熟悉的普通(干脆的)集合 A 的特征函数。这样，普通集合就是模糊集合的一种特殊情况。下面，我们考虑涉及模糊集合的几个定义，这些定义是普通集合中相应定义的扩展。

空集：当且仅当 Z 中的隶属度函数等于零，模糊集合为空集。

相等：当且仅当对于所有的 $z \in Z$ 有 $\mu_A(z) = \mu_B(z)$ ，两个模糊集合 A 和 B 相等。

补集：由 $\bar{A}$ 或 NOT(A) 表示模糊集合 A 的补集 (NOT)，定义为其隶属度函数是

$$\mu_{\bar{A}}(z) = 1 - \mu_A(z) \quad (3.8-2)$$

的集合，对于所有的 $z \in Z$ 。

子集：当且仅当对于所有的 $z \in Z$ ，有

$$\mu_A(z) \leq \mu_B(z) \quad (3.8-3)$$

模糊集合 A 是模糊集合 B 的子集。

并集：对于所有的 $z \in Z$ ，两个模糊集合 A 和 B 的并集是具有隶属度函数

$$\mu_U(z) = \max[\mu_A(z), \mu_B(z)] \quad (3.8-4)$$

的并集 U (OR)，表示为 $A \cup B$ 或 $A \text{ OR } B$ 。

交集：两个模糊集合 A 和 B 的交集是对于所有的 $z \in Z$ ，具有隶属度函数

$$\mu_I(z) = \min[\mu_A(z), \mu_B(z)] \quad (3.8-5)$$

的模糊集合 I ，表示为 $A \cap B$ 或 $A \text{ AND } B$ 。

注意，在处理模糊集合时，可使用熟悉的符号 NOT, OR 和 AND 来分别表示补、并和交。

例 3.18 模糊集合定义的说明。

图 3.45 说明了前面的一些定义。图 3.45 (a) 显示了两个集合 A 和 B 的隶属度函数。图 3.45 (b) 显示了集合 A 的补集的隶属度函数，图 3.45 (c) 显示了集合 A 和 B 的并集的隶属度函数，图 3.45 (d) 显示了这两个集合的交集的结果。注意，这些图形是我们所熟悉的关于普通集合的补集、并集和交集^①。

① 读者可能在文献中遇到过这样的例子，例如两个模糊集合的交集的隶属度函数曲线下的面积用阴影表示，以指出该操作的结果。这源于普通集合操作，是不正确的。在处理模糊集合时，这仅适用于沿着隶属度函数本身的点。

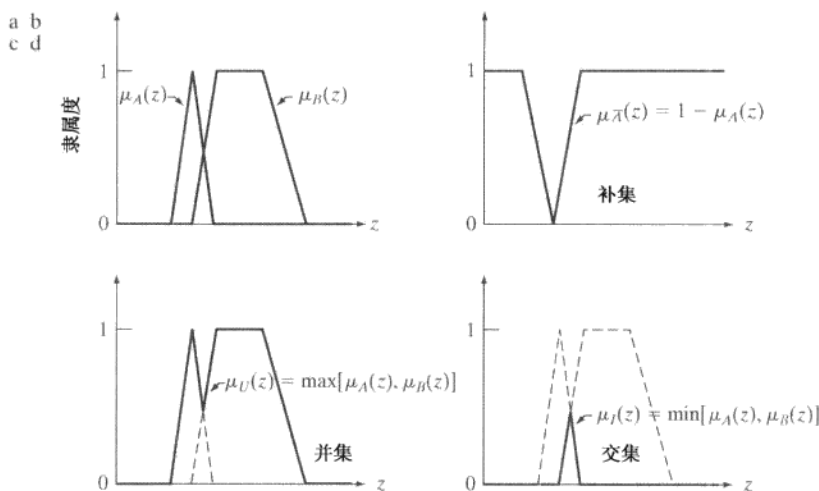


图 3.45 (a) 两个集合 A 和 B 的隶属度函数; (b) A 的补集的隶属度函数; (c)~(d) 两个集合的并集和交集的隶属度函数

尽管模糊逻辑和概率均在相同的区间[0, 1]上操作, 但这两种操作却有明显的区别。考虑图 3.44 中的例子, 概率的说法可能是“一个人年轻的可能性是 50%”, 而模糊逻辑的说法可能是“一个人在年轻人集合中的隶属度等级是 0.5”。这两种说法的区别很重要。在第一种说法中, 考虑一个人不是在年轻人的集合里, 就是不在年轻人的集合里; 我们仅有 50%的机会知道这个人属于哪个集合。第二种说法预设一个人的年轻程度, 在这种情况下其年轻程度是 0.5。另外一种解释是说这是一个“平均的”年轻人: 不是真年轻, 但也不是太接近不年轻。换句话说, 模糊逻辑完全不是概率; 它仅仅处理一个集合中隶属度的等级。在这种情况下, 模糊逻辑这一概念就在由含混和不精确而不是随机性表征的应用中找到了用途。

一些常用的隶属度函数

实际中使用的隶属度函数类型如下所示。

三角形:

$$\mu(z) = \begin{cases} 1 - (a - z)/b, & a - b \leq z < a \\ 1 - (z - a)/c, & a \leq z \leq a + c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8-6)$$

梯形:

$$\mu(z) = \begin{cases} 1 - (a - z)/c, & a - c \leq z < a \\ 1, & a \leq z < b \\ 1 - (z - b)/d, & b \leq z \leq b + d \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8-7)$$

Σ :

$$\mu(z) = \begin{cases} 1 - (a - z)/b, & a - b \leq z \leq a \\ 1, & z > a \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8-8)$$

S形:

$$S(z; a, b, c) = \begin{cases} 0, & z < a \\ 2\left(\frac{z-a}{c-a}\right)^2, & a \leq z \leq b \\ 1-2\left(\frac{z-c}{c-a}\right)^2, & b < z \leq c \\ 1, & z > c \end{cases} \quad (3.8-9)$$

钟形:

$$\mu(z) = \begin{cases} S(z; c-b, c-b/2, c), & z \leq c \\ 1-S(z; c, c+b/2, c+b), & z > c \end{cases} \quad (3.8-10)$$

钟形函数有时也称为 Π (或 π) 函数。

截尾高斯形:

$$\mu(z) = \begin{cases} e^{-\frac{(z-a)^2}{2b^2}}, & a-c \leq z \leq a+c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8-11)$$

典型地, 为简化公式, 当写成 $\mu(z)$ 时, 隶属度函数仅依赖于变量 z 。为了用式(3.8-10)的形式, 我们把式(3.8-9)作为一个例外。图 3.46 显示了刚才讨论的隶属度函数的几个例子。前三个函数是分段线性的, 接着的两个函数是平滑的, 最后一个函数是截尾高斯函数。式(3.8-9)描述了一个重要的 S 形函数, 在处理模糊集合时会频繁使用这个函数。该式中 $S=0.5$ 时, 值 $z=b$ 称为交叉点。如图 3.46(d) 所示, 这是曲线改变形状的那个点。不难证明 $b=(a+c)/2$ (见习题 3.31)。图 3.46(e) 所示的钟形曲线中, b 的值定义为曲线的带宽。

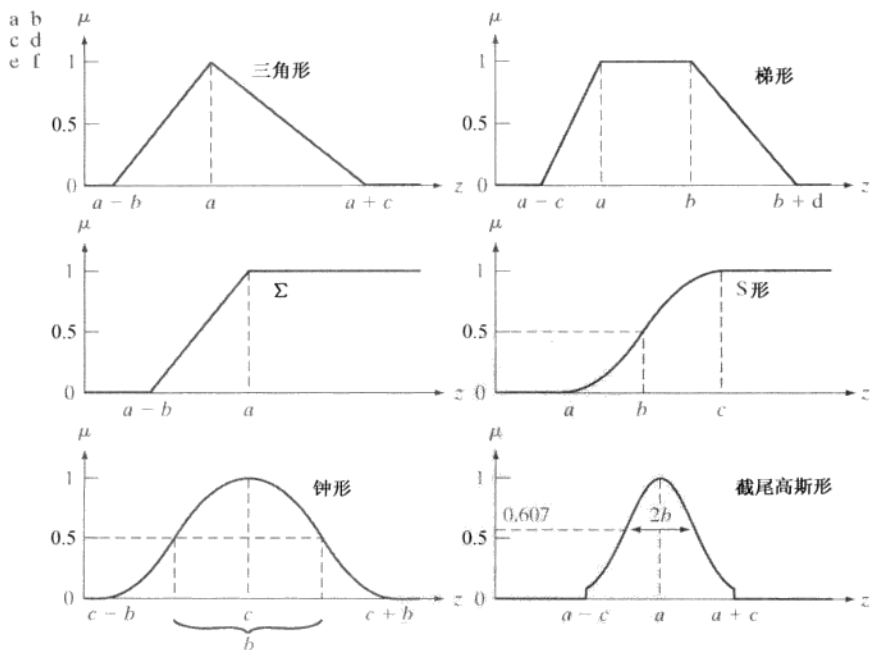


图 3.46 对应于式(3.8-6)至式(3.8-11)的隶属度函数

3.8.3 模糊集合应用

在这一节,我们将关注模糊集的应用基础,并通过一些简单且熟悉的例子来说明这些由此而来的概念。然后,我们将这些结果应用到 3.8.4 节和 3.8.5 节的图像处理中。采用这种说明方法,使得对该内容更容易理解,特别是对该领域的新读者。

假设我们感兴趣的是用颜色把给定的水果分为三类:生的、半熟的和成熟的。假设观察水果成熟的各个阶段得到了如下结论:生的水果是绿色的,半熟的水果是黄色的,成熟的水果是红色的。标志绿、黄和红是颜色感觉的含混描述。作为起点,这些标志必须以模糊形式来表达,也就是,它们必须被模糊化。这是通过将隶属度定义为颜色(光的波长)的函数来实现的,如图 3.47(a)所示。在本文中,颜色是一个语言学上的变量,而一种特定的颜色(如有固定波长的红色)是一个语言学上的值。通过用隶属度函数将语言学上的值 z_0 映射到区间 $[0, 1]$ 来模糊化,如图 3.47(b)所示。

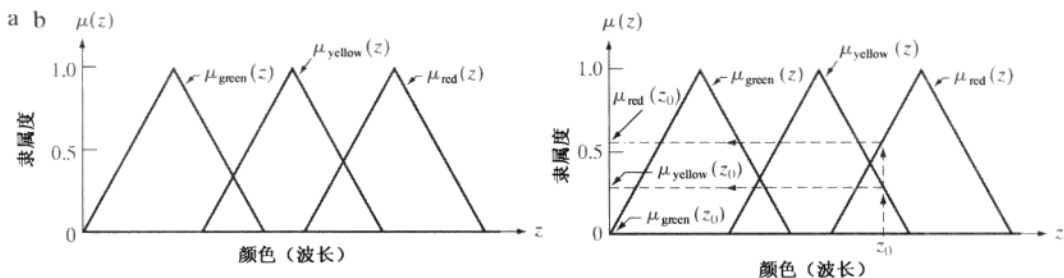


图 3.47 (a)用于模糊颜色的隶属度函数; (b)对特定颜色 z_0 的模糊化(描述颜色感觉的曲线是钟形曲线;见 6.1 节的例子。但在处理模糊集合时,通常使用三角形曲线来近似)

刚刚解释的特定问题的知识可以用如下形式的 IF-THEN 模糊规则来形式化:

R_1 : IF 颜色是绿色, THEN 水果是生的。

OR

R_2 : IF 颜色是黄色, THEN 水果是半熟的。

OR

R_3 : IF 颜色是红色, THEN 水果是熟的。

IF-THEN 规则中 THEN 左侧的部分通常称为前提(条件),而右侧的部分称为后果(结论)。

这些规则描述了关于该问题的知识的总和;它们确实没有超出思维过程的形式化。

该过程的下一步是寻找一种使用输入(颜色)和由 IF-THEN 规则描述的知识基础来创建模糊系统的输出的方法。这一处理称为推断或推理。然而,在运用推断之前,必须处理每个规则的前提以便产生单个值。正如在这一节末尾所示的那样,一个前提的多个部分可由 AND 和 OR 链接起来。基于 3.8.2 节的定义,这意味着执行最小和最大操作。为简化说明,我们首先处理仅包含一个部分的前提的规则。

因为我们处理的是模糊输入,输出本身也是模糊的,因此,也必须针对输出定义隶属度函数。图 3.48 显示了我们将在该例中使用的模糊输出的隶属度函数。注意,输出的自变量是成熟的,它不同于输入的自变量。

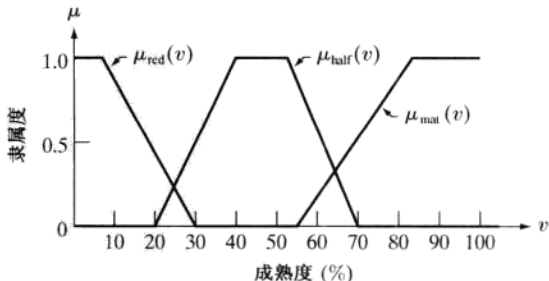


图 3.48 表征输出为生的、半熟的和熟的隶属度函数

图3.47和图3.48与基础规则一起,包含了所要求的与输入和输出相关的所有信息。例如,我们注意到,“红色 AND 成熟”的表达与前面定义的交集(AND)操作一样。在现在的情况下,输入和输出的隶属度函数的自变量是不同的,因此结果将是二维的。例如,图3.49(a)和图3.49(b)显示了红色和成熟的隶属度函数,图3.49(c)显示了它们的二维关系。为了得到两个函数间 AND 操作的结果,回忆式(3.8-5)可知,AND 定义为两个隶属度函数的最小,即

$$\mu_3(z, v) = \min\{\mu_{\text{red}}(z), \mu_{\text{mat}}(v)\} \quad (3.8-12)$$

其中,下标3表示这是基础知识中规则 R_3 的结果。图3.49(d)显示了 AND 操作的结果^①。

式(3.8-12)是涉及两个隶属度函数的通解。在实践中,我们感兴趣的是来自一个特定输入的输出结果。令 z_0 表示红色的一个特定值。该输入的响应中的红色分量的隶属等级是简单的标量值 $\mu_{\text{red}}(z_0)$ 。我们找到与规则 R_3 和这个特定输入对应的输出,即在 $\mu_{\text{red}}(z_0)$ 和 $\mu_3(z, v)$ 间执行 AND 操作,并在 z_0 处求值。如前面表明的那样,AND 操作使用最小操作来实现:

$$Q_3(v) = \min\{\mu_{\text{red}}(z_0), \mu_3(z_0, v)\} \quad (3.8-13)$$

其中, $Q_3(v)$ 表示由规则 R_3 和一个特定输入导致的模糊输出。 Q_3 中的唯一变量是所期望的输出变量 v 。

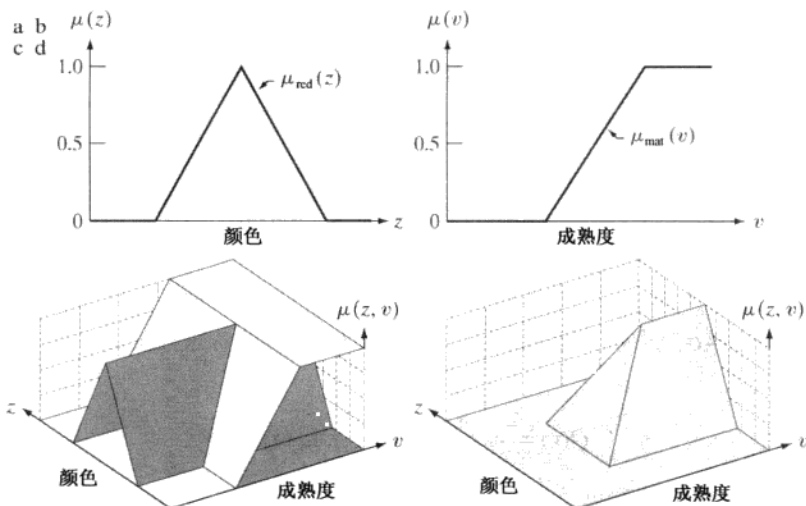


图 3.49 (a) 与红色相关联的隶属度函数的形状; (b) 相应的输出隶属度函数, 两个函数由规则 R_3 相关联; (c) 两个函数组合在一起的表示。该表示是二维的, 因为在图(a)和图(b)中的自变量是不同的; (d) 图(a)和图(b)的 AND 操作结果, 如式(3.8-5)的定义一样

为了用图形方式解释式(3.8-13), 再次考虑图 3.49(d), 该图显示了通用函数 $\mu_3(z, v)$ 。执行一个正常数 c 的最小化操作, 该函数将在该常数之上裁剪 $\mu_3(z, v)$ 的所有值, 如图 3.50(a)所示。然而, 我们只对沿彩色轴的一个值(z_0)感兴趣, 因此, 相关的结果是沿着成熟轴的截短函数的剖面, 该剖面位

① 注意, 式(3.8-12)是由序对值 $\{\mu_{\text{red}}(z), \mu_{\text{mat}}(v)\}$ 形成的, 回忆可知, 序对集合通常称为笛卡儿积, 由 $X \times V$ 表示, 其中 X 是由 $\mu_{\text{red}}(z)$ 改变 z 生成的值集 $\{\mu_{\text{red}}(z_1), \mu_{\text{red}}(z_2), \dots, \mu_{\text{red}}(z_n)\}$, V 是由 $\mu_{\text{mat}}(v)$ 改变 v 生成的类似值集。这样, $X \times V = \{\mu_{\text{red}}(z_1), \mu_{\text{mat}}(v_1), \dots, (\mu_{\text{red}}(z_n), \mu_{\text{mat}}(v_n))\}$, 由图 3.49(d)我们看到, 涉及两个变量的 AND 操作可表达为从 $X \times V$ 到区间 $[0, 1]$ 的映射, 表示为 $X \times V \rightarrow [0, 1]$ 。尽管我们在当前的讨论不使用这种表示, 但这里提及它的原因在于我们可能会在关于模糊集合的文献中遇到它。

于 z_0 处, 如图 3.50(b) 所示 [因为图 3.50(a) 对应于规则 R_3 , 它遵循 $c = \mu_{\text{red}}(z_0)$]。式 (3.8-13) 是该剖面的表达式。

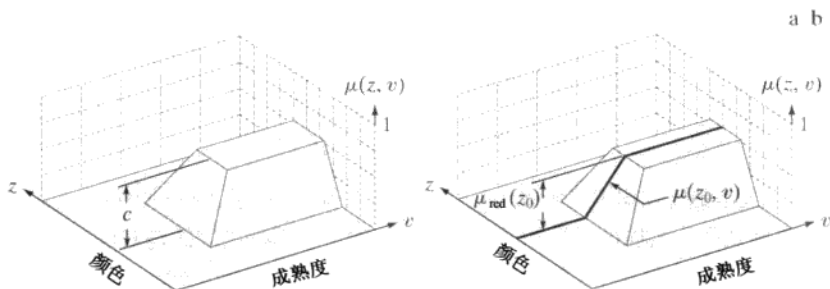


图 3.50 (a) 一个任意常数 c 和来自式 (3.8-12) 的函数 $\mu_3(z, v)$ 的最小化结果。

最小化等价于一个 AND 操作; (b) 在特定颜色 z_0 处的剖面(黑线)

利用同样的推理, 我们可得到由其他两个规则和特定输入 z_0 导致的模糊响应, 如下所示:

$$Q_2(v) = \min \{ \mu_{\text{yellow}}(z_0), \mu_2(z_0, v) \} \quad (3.8-14)$$

和

$$Q_1(v) = \min \{ \mu_{\text{green}}(z_0), \mu_1(z_0, v) \} \quad (3.8-15)$$

这些公式中的每一个都是与一个特殊规则和一个特定输入有关的输出。也就是, 它们描绘了前面几段中提到的隐含处理的结果。记住, 这三个响应中的每一个都是模糊集合, 即使输入是一个标量值。

为得到全部的响应, 我们把单个响应聚集起来。在本节开始给出的规则基础中, 三个规则是由 OR 操作联系起来的。这样, 全部模糊输出由下式给出:

$$Q = Q_1 \text{ OR } Q_2 \text{ OR } Q_3 \quad (3.8-16)$$

我们看到全部的响应是这三个单个模糊集合的并集。因为 OR 定义为最大操作, 所以我们将该结果写为

$$Q(v) = \max_r \left\{ \min_s \{ \mu_s(z_0), \mu_r(z_0, v) \} \right\} \quad (3.8-17)$$

其中, $r = \{1, 2, 3\}$, 并且 $s = \{\text{绿色}, \text{黄色}, \text{红色}\}$ 。尽管该表达式是从一个例子中推导出来的, 但它完全通用; 为将其扩展到 n 个规则, 我们可简单地令 $r = \{1, 2, \dots, n\}$; 类似地, 我们可以把 s 扩展到包括任何有限数量的隶属度函数。式 (3.8-16) 和式 (3.8-17) 描述了相同的事情: 模糊系统的响应 Q , 是由该隐含处理每一个规则得到的单个模糊集合的并集。

图 3.51 以图示方式总结了到目前为止所讨论的内容。图 3.51(a) 显示了在 z_0 处计算的三个输入隶属度函数, 图 3.51(b) 显示了对输入 z_0 的响应的输出。这些模糊集合是使用图 3.50(b) 的方法裁剪后的剖面。注意, Q_1 由所有的 0 组成, 因为 $\mu_{\text{green}}(z_0) = 0$; 也就是, Q_1 是空集, 正如在 3.8.2 节定义的那样。图 3.51(c) 显示了最终结果 Q , 它本身是一个由 Q_1 , Q_2 和 Q_3 的并集形成的模糊集合。

我们已经成功地得到了相应于特定输入的完整输出, 但我们仍然在处理一个模糊集合。最后一步是使用称为去模糊的适当地处理, 从模糊集合 Q 中得到一个“干脆的”输出 v_0 。对 Q 去模糊而得到“干脆的”输出有几种方法。用得最多的一种方法是计算该集合的重心(本章末尾给出的参考文献中讨论了其他方法)。这样, 如果来自式 (3.8-17) 的 $Q(v)$ 有 K 种可能的值 $Q(1), Q(2), \dots, Q(K)$, 则其重心由下式给出:

$$v_0 = \frac{\sum_{v=1}^K vQ(v)}{\sum_{v=1}^K Q(v)}$$

(3.8-18)

在图 3.51 (c) 中，用 Q 的离散值^①计算该公式，得到 $v_0 = 72.3$ ，它指出给定的颜色 z_0 意味着一种水果的成熟度约为 72%。

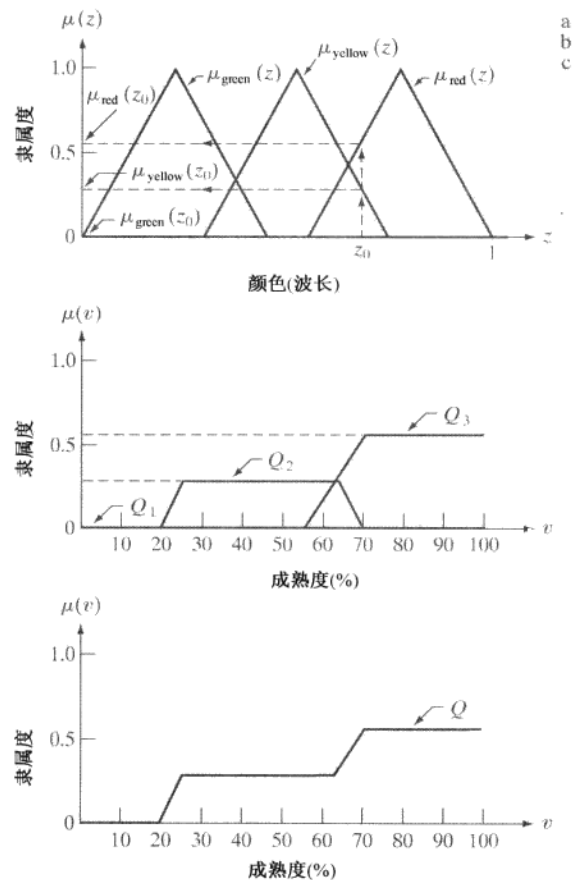


图 3.51 (a) 所选特定颜色 z_0 的隶属度函数；(b) 由式 (3.8-13) 到式 (3.8-15) 得到的单独的模糊集合；(c) 用式 (3.8-16) 或式 (3.8-17) 得到的最终模糊集合

到目前为止，我们已经讨论了 IF-THEN 规则，这些规则的前提只有一部分，例如“如果颜色是红色”。包含更多部分的规则必须组合起来，以便得出描述该规则的整个前提的单个数字。例如，假设我们有一个规则：IF 颜色是红色 OR 坚固性是软的，THEN 水果是成熟的。必须为语言学变量“软的”定义一个隶属度函数。然后，为了获得考虑前提的两部分的规则的单个数字，我们首先要使用“红色”隶属度函数来评估一种给定的“红色”输入值，然后使用“软的”隶属度函数来评估一种给定的“坚固度”值。因为两部分由 OR 链接起来，我们使用两个结果值的最大值^②。然后，该值用于“干脆的”成

① 为清楚起见，图 3.51 (c) 中的模糊集合 Q 显示为实线，但请记住，我们在本书中处理的是数字量，因此 Q 是一个数字函数。
② 使用 AND 将各部分连接起来的前提条件可使用最小操作进行类似的计算。

熟输出隶属度函数的推断处理,该函数是与规则相联系的函数。其余过程与以前一样,就像下面的总结说明的那样。

图3.52显示了使用两个输入“颜色和坚固性”的水果例子。我们可使用该图和前述内容,把基于规则的模糊逻辑应用中的主要步骤总结如下。

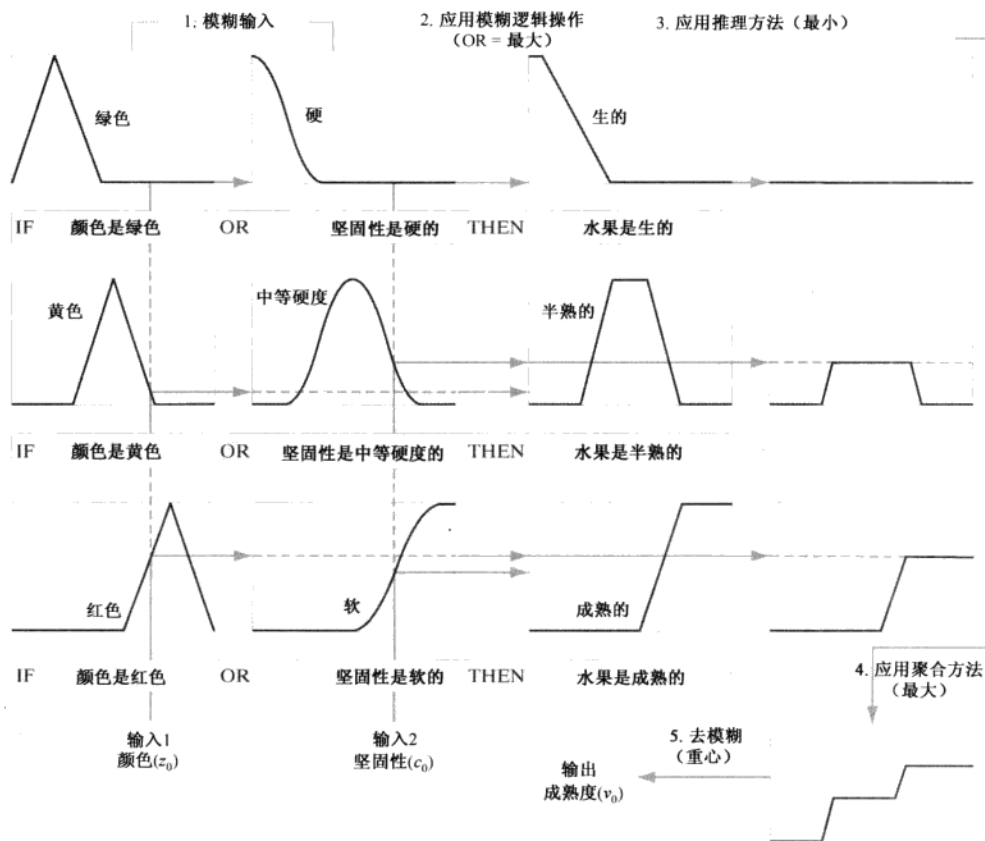


图 3.52 说明用于实现一个基于规则的模糊系统的五个基本步骤的例子: (1) 模糊; (2) 逻辑操作(该例中仅使用了 OR); (3) 推断; (4) 聚合; (5) 去模糊

1. 模糊输入: 如图3.52所示的前两列那样。对于每个标量输入, 通过将该输入映射到区间 $[0, 1]$, 在每个规则中使用可用的隶属度函数, 找到相应的模糊值。
2. 执行任何需要的模糊逻辑操作: 必须合并前提各个部分的输出, 并使用最大或最小操作生成单个值, 具体是用最大操作还是用最小操作, 取决于各部分是由 OR 连接还是由 AND 连接。在图 3.52 中, 前提的所有部分由 OR 连接, 因此全部使用最大操作。前提的各部分的数量和用于连接这些不同部分的逻辑算子的类型, 会因规则的不同而不同。
3. 应用一种推断方法: 每个规则的前提的单个输出用来提供与规则相对应的输出。对于推断, 我们用 AND, 它被定义为最小操作。这就以该前提提供的值“修剪”了相应输出的隶属度函数, 如图 3.52 中的第三列和第四列所示。
4. 对来自步骤 3 的模糊集合应用一种聚合方法: 如图 3.52 中的最后一列所示, 每个规则的输出都是一个模糊集合。必须组合这些模糊集合来产生单个输出模糊集合。这里所用的方法是对各个输出使用 OR 操作, 因此采用了最大操作。

5. 对最后输出的模糊集合去模糊: 在最后一步中, 我们得到了一个“干脆的”标量输出。这是通过计算步骤4中得到的聚合模糊集合的重心得到的。

当变量数很大时, 实践中通常使用方便的表示方法(变量, 模糊集合)来将一个变量与其对应的隶属度函数配对。例如, 规则 IF 颜色是绿色, THEN 水果是生的, 在这里可以写为 IF(z , 绿色) THEN (v , 生的), 如以前那样, 变量 z 和 v 分别表示颜色和成熟度, 而绿色和生的分别是由隶属度函数 $\mu_{\text{green}}(z)$ 和 $\mu_{\text{verd}}(v)$ 定义的两个模糊集合。

通常, 当处理 M 个 IF-THEN 规则时, N 个输入变量 $z_1, z_2, \dots, z_N$ 和一个输出变量 v , 在图像处理中最常用的模糊规则公式的类型有如下形式:

$$\begin{aligned} & \text{IF}(z_1, A_{11}) \text{ AND } (z_2, A_{12}) \text{ AND } \dots \text{AND } (z_N, A_{1N}) \text{ THEN } (v, B_1) \\ & \text{IF}(z_1, A_{21}) \text{ AND } (z_2, A_{22}) \text{ AND } \dots \text{AND } (z_N, A_{2N}) \text{ THEN } (v, B_2) \\ & \dots \\ & \text{IF}(z_1, A_{M1}) \text{ AND } (z_2, A_{M2}) \text{ AND } \dots \text{AND } (z_N, A_{MN}) \text{ THEN } (v, B_M) \\ & \text{ELSE } (v, B_E) \end{aligned} \quad (3.8-19)$$

其中, A_{ij} 是与第 i 个规则和第 j 个输入变量相关联的模糊集合, B_i 是与第 i 个规则的输出相关联的模糊集合, 并且我们已经假设规则的前提分量由 AND 连接。注意, 我们已介绍过与模糊集合 B_E 相关联的 ELSE 规则。当前述规则没有一个完全满足时, 执行该规则; 其输出后面再解释。

正如早些时候介绍的那样, 必须计算每个规则的前提的所有元素, 以便得到单一标量值。在图 3.52 中, 我们使用了最大操作, 因为规则是基于模糊 OR 的。在式(3.8-19)中使用 AND, 因此我们必须用最小操作。在式(3.8-19)中, 计算第 i 个规则的前提产生一个标量输出 λ_i , 其由下式给出:

$$\lambda_i = \min \{ \mu_{A_{ij}}(z_j); j=1, 2, \dots, N \} \quad (3.8-20)$$

对于 $i=1, 2, \dots, M$, 其中 $\mu_{A_{ij}}(z_j)$ 是模糊集合 A_{ij} 在第 j 个输入值计算的隶属度函数。通常, λ_i 称为第 i 个规则的强度水平(或点火水平)。根据前面的讨论, λ_i 只是用于剪切第 i 个规则的输出函数的一个简单的值。

在规则集中是使用 OR 还是使用 AND, 取决于规则被声明的方式, 而声明规则的方式则取决于手边的问题。为便于读者熟悉两者的用法, 我们在图 3.52 中使用了 OR, 而在式(3.8-19)中使用了 AND。

当 THEN 规则的条件很难满足时, 执行 ELSE 规则(我们在 3.8.5 节将给出一个如何使用 ELSE 规则的详细例子)。当所有其他规则很弱时, 它的响应应该较强。在某种意义上, 可以将 ELSE 规则看成是在其他规则的结果上执行 NOT 操作。从 3.8.2 节我们知道 $\mu_{\text{NOT}(A)}(z) = \mu_{\bar{A}}(z) = 1 - \mu_A(z)$ 。然后, 在合并(AND)所有级别的 THEN 规则中利用这一概念, 给出 ELSE 规则的如下强度水平:

$$\lambda_E = \min \{ 1 - \lambda_i; i=1, 2, \dots, M \} \quad (3.8-21)$$

我们看到, 如果所有 THEN 规则在“最大强度”(其响应为 1)处点火, 则 ELSE 规则的响应如所期望的那样是 0。当 THEN 规则的响应比较弱时, 则 ELSE 规则的强度将增加。这就是软件编程中使用的 IF-THEN-ELSE 规则的模糊规则的对应。

当在前提中处理 OR 时, 我们可以简单地在式(3.8-19)中用 OR 代替 AND, 并在式(3.8-20)中用最大(max)代替最小(min); 式(3.8-21)保持不变。尽管可以用公式明确表达更为复杂的前提和由此导致的结果, 但仅使用 AND 或 OR 开发的公式是相当通用的, 并且广泛应用于各种图像处理应用中。本章末尾的参考文献中包含了其他(但很少使用)的模糊逻辑算子的定义, 并探讨了推断(包括多个输出)和去模糊的其他方法。本节前面的介绍作为这一话题的进一步阅读, 是基础性的和服务性的。在下两节中, 我们将说明如何把模糊概念用于图像处理。

3.8.4 使用模糊集合进行灰度变换

考虑对比度增强这样的一般问题，这是灰度变换的主要应用之一。我们可以用如下规则说明灰度级图像对比度增强的过程：

- IF 一个像素是暗的，THEN 使它较暗。
- IF 一个像素是灰的，THEN 使它仍是灰的。
- IF 一个像素是亮的，THEN 使它较亮。

记住，它们是模糊项，我们可以用图3.53(a)中的隶属度函数来表示暗、灰和亮这些概念。

在输出项中，我们可以将“较暗”考虑为暗灰度值的程度(100%的黑是暗色调的极限值)，将“较亮”考虑为亮色调的程度(100%的白是极限值)，将“灰的”视为中间灰度级中灰度的程度。这里，所谓的“程度”是一种特定灰度的数量。例如，80%的黑是非常暗的灰色。如图3.53(b)所示，当作为恒定灰度来解释被修改的强度时，输出隶属度函数是单一值(隶属度函数是常数)。在区间[0, 1]内，当单一值被来自相应规则的响应强度裁剪时，会出现各种程度的灰度，正如图3.52的第四列那样(但应记住，如图中所示，我们这里仅有一个输入，而不是两个)。因为在输出隶属度函数中我们处理的是常数，故它遵循式(3.8-18)，即对于任何输入 z_0 ，输出 v_0 由下式给出：

$$v_0 = \frac{\mu_{\text{dark}}(z_0) \times v_d + \mu_{\text{gray}}(z_0) \times v_g + \mu_{\text{bright}}(z_0) \times v_b}{\mu_{\text{dark}}(z_0) + \mu_{\text{gray}}(z_0) + \mu_{\text{bright}}(z_0)} \quad (3.8-22)$$

该表达式中分子和分母的总和比式(3.8-18)中的简单，因为输出隶属度函数是被模糊值修改(裁剪)过的常数。

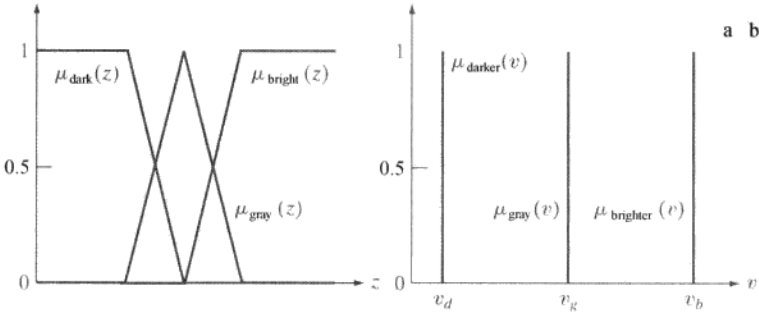


图 3.53 基于规则的对比度增强：(a)输入的隶属度函数；(b)输出的隶属度函数

模糊图像处理的计算量很大，因为全部模糊处理、所有规则的前提、推断、聚集和去模糊，都必须应用到输入图像中的每个像素。这样，使用像式(3.8-22)中那样的单一值，通过简化推断、聚集和去模糊，可有效地减少计算需求。在处理速度是重要要求的应用中，这些节省是很有意义的。

例 3.19 使用基于规则的模糊集的对比度修改的图像增强的说明。

图3.45(a)显示了一幅图像，由于该图像的灰度只占灰度级很窄的范围[见图3.55(a)中的直方图]，给出的是一幅低对比度外观的图像。作为对比的基础，图3.54(b)是直方图均衡后的结果。正如该结果的直方图显示的那样[见图3.55(b)]，扩展整个灰度级的确增加了对比度，但在高端和低端引入了使图像“过度感光”的外观。例如，爱因斯坦教授的前额和头发的细节大部分都缺失了。图3.54(c)显示了使用前几段讨论的基于规则的对比度修改方法的结果。图3.55(c)显示了所用的叠加在原图像的直方图上的输入隶属度函数。输出单一值选择为： $v_d = 0$ (黑)， $v_g = 127$ (中间灰度)和 $v_b = 255$ (白)。



图 3.54 (a) 低对比度图像；(b) 直方图均衡后的结果；(c) 用基于规则的模糊集合的对比度增强后的结果

比较图 3.54(b) 和图 3.54(c)，我们看到后者在色调上有相当大的改进。例如，注意前额和头发中的细节与图 3.54(b) 中相同区域的对比。通过研究示于图 3.55(d) 的 3.54(c) 的直方图可很容易地解释这种改进的原因。不像均衡过的图像的直方图那样，该直方图保留了原图像直方图的相同的基本特征。然而，暗级别(直方图低端的几个高峰值)的左移很明显，从而暗化了级别。对于亮级别则相反。中间灰度稍微地分离了，比直方图均衡化小了很多。

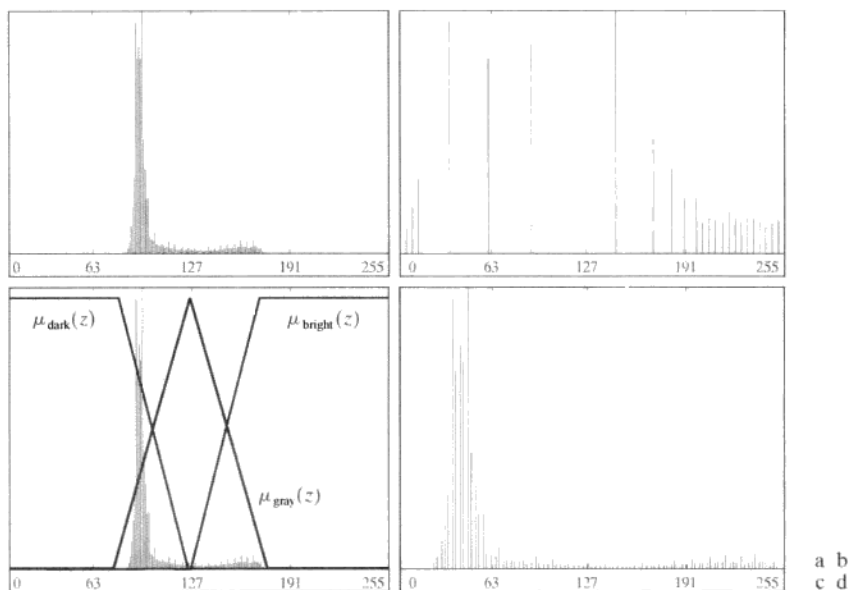


图 3.55 (a)~(b) 图 3.54(a) 和 (b) 的直方图；(c) 叠加在图(a)上的输入隶属度函数；(d) 图 3.54(c) 的直方图

在性能上这一改进的代价是加大了处理的复杂性。当处理速度和图像吞吐量是重点考虑的问题时，可遵循的实际方法是使用模糊集技术来决定什么是看似可很好地平衡图像的直方图。然后，使用更快的技术如直方图规定化，通过把输入图像的直方图映射到一个或多个用模糊方法确定的“理想”直方图，来达到类似的结果。

3.8.5 使用模糊集合进行空间滤波

当把模糊集合用于空间滤波时，基本方法是定义一个邻域特性，该特性“截获”滤波器支持检测的本质。例如，考虑检测一幅图像中区域间的边缘。这在图像处理的应用中是很重要的，例如本节前面讨论的锐化和第 10 章将要讨论的图像分割等。

我们可以开发一个基于模糊集合概念的边缘提取算法：“如果一个像素属于平滑区，则令其为白

色, 否则使其为黑色”, 其中“黑色”和“白色”是模糊集合。为了用模糊术语表示“平滑区”这一概念, 我们可以考虑邻域中心处像素和邻域像素间的灰度差。对于图 3.56(a) 中的 3×3 邻域, 中心像素(标为 z_5)和邻域的每个像素间的灰度差形成了图 3.56(b) 所示的 3×3 子图像, 其中 d_i 表示第 i 个邻点和中心点间的灰度差(即 $d_i = z_i - z_5$, 其中 z_5 为灰度值)。四个 IF-THEN 规则和一个 ELSE 规则的简单集合就可以实现本段开始提到的模糊集合概念的本质:

IF d_2 是 0 AND d_6 是 0 THEN z_5 是白色
IF d_6 是 0 AND d_8 是 0 THEN z_5 是白色
IF d_8 是 0 AND d_4 是 0 THEN z_5 是白色
IF d_4 是 0 AND d_2 是 0 THEN z_5 是白色
ELSE z_5 是黑色

为简化这个例子, 我们仅使用了 4 邻域和中心点的灰度差。使用 8 邻域可直接扩展此处显示的方法。

其中, “0”也是一个模糊集合。每个规则的后项定义一个值, 中心像素(z_5)的灰度被映射到该值上。也就是说, 语句“THEN z_5 是白色”意味着位于模板中心位置的像素的灰度被映射为白色。这些规则简单地表明, 如果前边提到的灰度差为 0(在模糊意义下), 则中心像素考虑为平坦区域的一部分; 否则, 中心像素就考虑为边缘像素。

图 3.57 分别显示了模糊集合 0、黑色和白色的可能的隶属度函数, 其中我们使用 ZE, BL 和 WH 以简化表示。注意, 对于一幅具有 L 个可能灰度级的图像, 模糊集合 ZE 的自变量的范围是 $[-L+1, L-1]$, 因为灰度差的范围可以在 $-(L-1)$ 和 $(L-1)$ 之间。另一方面, 输出灰度的范围如原图像中那样是 $[0, L-1]$ 。图 3.58 以图形方式显示了上面规定的规则, 其中, 标为 z_5 的方框指出中心像素的灰度被映射到输出值 WH 或 BL。

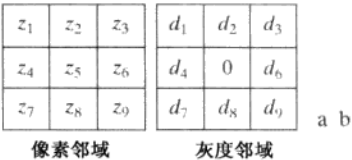


图 3.56 (a) 一个 3×3 像素邻域; (b) 中心像素和其邻点间的相应灰度差。为简化, 讨论当前应用中仅使用了 d_2, d_4, d_6 和 d_8

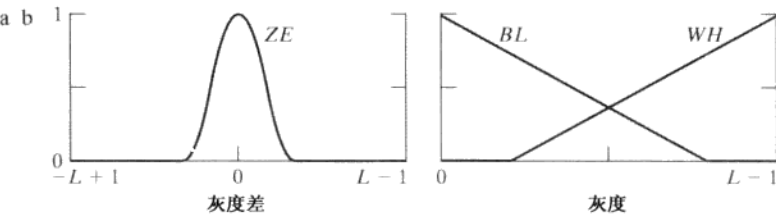


图 3.57 (a) 模糊集合 0 的隶属度函数; (b) 模糊集合“黑色”和“白色”的隶属度函数

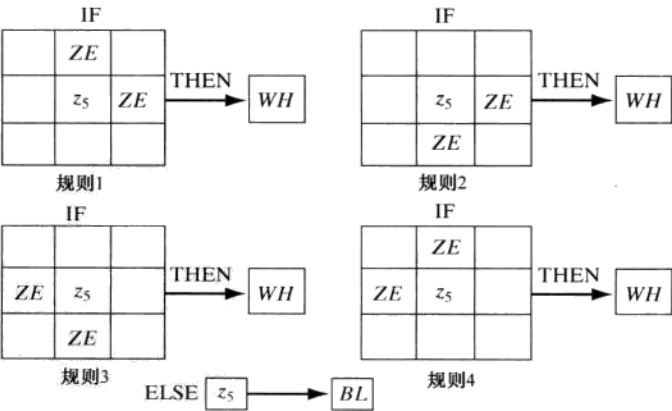


图 3.58 边缘检测的模糊规则

例 3.20 使用基于规则的模糊集合的空间滤波增强边缘的说明。

图3.59(a)显示了一幅 512×512 的人的头部CT扫描图像,图3.59(b)是使用刚刚讨论的模糊空间滤波方法的结果。注意,提取区域间边缘的方法的效果,包括大脑的轮廓(灰色区域内部)。图像中的恒定区域呈现灰色,因为当前面讨论的灰度差接近0时,THEN规则有一个很强的响应。这些响应依次裁剪函数 WH 。输出(裁剪过的三角形区域的重心)是 $(L-1)/2$ 和 $(L-1)$ 间的一个常数,从而在图像中产生了所看到的浅灰色调。该图像的对比度可以通过扩展灰度级来显著地改进。例如,图3.59(c)是通过在 $K=L-1$ 时执行式(2.6-10)和式(2.6-11)中定义的灰度标定得到的。最终结果是图3.59(c)中灰度值跨过从0到 $(L-1)$ 的全部灰度级。

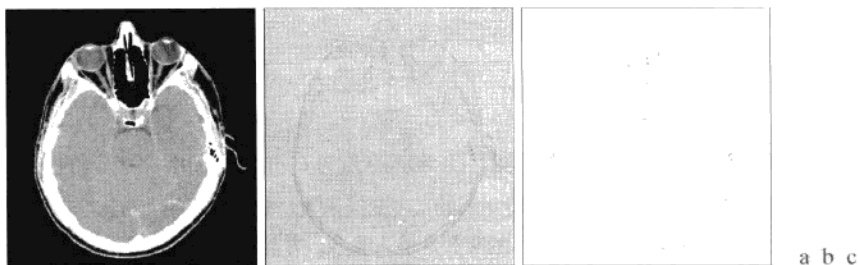


图 3.59 (a)人的头部的CT扫描图像;(b)使用图 3.57 中的隶属度函数和图 3.58 中的规则的模糊空间滤波的结果;(c)灰度标定后的结果。(b)和(c)中淡黑色的图像边缘是为增加清晰度添加的,它们不是数据的一部分(原像由 Vanderbilt 大学的 David R. Pickens 博士提供)

小结

您刚刚了解到的内容是灰度变换和空间滤波中当前使用的有代表性的技术。本章中所包含的主题都是可以作为发展领域的基础的基本材料而选择的。虽然本章中所用的大多数例子都是关于图像增强的,但所介绍的技术都是可以通用的,并且在与图像增强完全无关的本书剩余章节中您会再次遇到它们。在下一章中,我们将再一次注意滤波,但是使用的是频率域的概念。正如您将要看到的那样,这里研究的线性空间滤波和频率域滤波之间存在着一一对应的关系。

参考文献

3.1 节中的内容来自 Gonzalez[1986]的书籍。3.2 节内容的辅助读物可以在 Schowengerdt[1983], Poyton[1996]和 Russ[1999]中找到。关于图像最佳显示的内容,也可参阅 Tsujii 等人[1998]的论文。关于直方图处理的早期参考文献有 Hummel[1974], Gonzalez 和 Fittes[1977]及 Woods 和 Gonzalez[1981]的著述。Stark[2000]对自适应对比度增强的直方图均衡给出了重要的概括。对比度增强的其他方法由 Centeno 和 Haertel[1997]及 Cheng 和 Xu[2000]给出了例子。严格的直方图规定化方面进一步阅读的材料见 Coltuc, Bolon 和 Chassery[2006]的论著。局部直方图均衡方法的延伸内容见 Caselles 等人[1999]和 Zhu 等人[1999]的材料。对于图像处理中局部统计应用和实现,可以参考 Narendra 和 Fitch[1981]的著述。Kim 等人[1997]介绍了一种结合梯度处理与局部统计处理来增强图像的有趣方法。

关于线性空间滤波器及其实现的附加读物可见 Umbaugh[2005], Jain[1989]及 Rosenfeld 和 Kak[1982]的材料。排序滤波器在这些参考材料中也有讨论。Wilburn[1998]也概括地介绍了排序滤波器。Pitas 和 Venetsanopoulos[1990]所著的书中涉及了中值滤波器和其他非线性滤波器。IEEE Transaction in Image

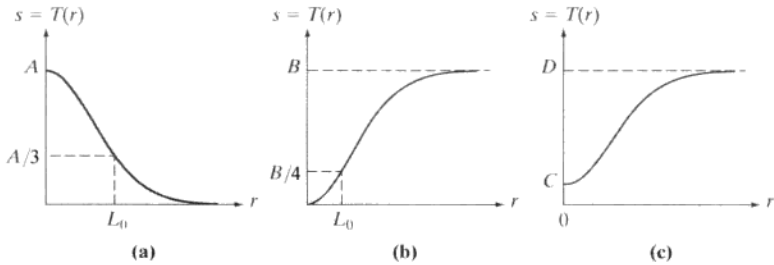
Processing[1996]的一期特刊中介绍了非线性图像处理的内容。有关高提升滤波的内容来自 Schowengerdt[1983]的论著。在讨论图像复原(见第 5 章)和边缘检测(见第 10 章)时,还会遇到本章中介绍的许多空间滤波器。

3.8 节的基础参考材料是 L. A. Zadeh 撰写的关于模糊逻辑的三篇论文(Zadeh[1965, 1973, 1976])。正如它们建立的模糊逻辑及其应用基础那样,这些论文是精心书写和有详细阅读价值的。关于模糊逻辑在图像处理中广泛应用的综述可在 Kerre 和 Nachtgae[2000]的书中找到。3.8.4 节的中例子是以 Tizhuoosh[2000]描述的类似的应用为基础的。3.8.5 节中的例子基本上来自 Russo 和 Ramponi[1994]的论著。模糊集合在灰度变换和图像滤波中的应用的其他例子可分别参阅 Patrascu[2004]及Nie和Barner[2006]的论著。前面所述的从 1965 年到 2006 年的参考文献,是详细研究在图像处理中使用模糊集合的许多方法的起点。本章中讨论的许多方法的软件实现可在 Gonzalez, Woods 和 Eddins[2004]中找到。

习题

 标有星号的习题的详细解答可在本书的网站上找到。该网站还包含有基于本章内容的建议项目。

- ★3.1 为了展开一幅图像的灰度,使其最低灰度为 C 、最高灰度为 $L-1$, 试给出一个单调的变换函数。
- 3.2 一个 α 为正常数的指数式 $e^{-\alpha r^2}$ 对于构造平滑的灰度变换函数是非常有用的。从这个基本函数出发,构造具有下列图形形状变换函数。所示的常数是输入参数,并且您提出的变换必须以特定形式包含这些参数(为了简化您的答案,第三条曲线中不需要参数 L_0)。



- 3.3 ★ (a) 试给出实现图 3.2(a) 所示的对比度拉伸变换的一个连续函数。此函数不仅包含参数 m , 而且还必须包含参数 E , 以便控制灰度值由低向高变化时函数的斜率。该函数应归一化, 以使其最小值和最大值分别为 0 和 1。
- (b) 画出作为参数 E 的函数的一组变换, 固定值 $m = L/4$, 其中 L 是图像中灰度的级数。
- (c) 为使函数如图 3.2(b) 的函数那样有效地执行, E 的最小值是什么? 换句话说, 您的函数与图 3.2(b) 可以不同。它仅有产生一幅二值图像相同的结果。假设使用 8 比特图像进行处理, 并使 $m = 128$ 。另外, 令 C 是您正使用的计算机中所能表示的最小正数。
- 3.4 提出一组能够产生 4 比特单色图像所有单独比特平面的灰度分层变换(例如, 变换函数 $T(r)$, 当 r 在 $[0, 7]$ 范围内时, $T(r) = 0$, 而当 r 在 $[8, 15]$ 范围内时, $T(r) = 15$, 此函数可以产生一幅 8 比特图像的 第 4 比特平面图像)。
- 3.5 ★ (a) 通常, 如果将低阶比特平面的一半设为零值, 对一幅图像的直方图有何影响?
- (b) 如果将高阶比特平面的一半设为零值, 对一幅图像的直方图有何影响?
- ★3.6 试解释为什么离散直方图均衡技术一般不能得到平坦的直方图?
- 3.7 假设对一幅数字图像进行直方图均衡处理。试证明(对直方图均衡后的图像)进行第二次直方图均衡处理的结果与第一次直方图均衡处理的结果相同。
- 3.8 在某些应用中, 将输入图像的直方图模型化为高斯概率密度函数是很有用的, 高斯概率密度函数的形式为

$$p_r(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma^2}}$$

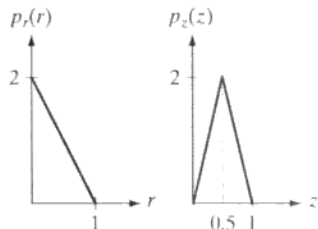
其中 m 和 σ 分别是高斯概率密度函数的均值和标准差。具体处理方法是将 m 和 σ 看成是给定的图像的平均灰度级和对比度。对于直方图均衡，您所用的变换函数是什么？

★3.9 假设图像的像素值是连续的，用一个例子说明有可能存在这样的情况，即由式(3.3-4)给出的变换函数满足 3.3.1 节中的条件(a)和(b)，但其反变换却不能满足条件(a)。

3.10 (a) 证明式(3.3.8)中给出的离散变换函数对直方图均衡处理满足 3.3.1 节中的条件(a)和(b)。

★(b) 证明只有在灰度 $r_k, k=0, 1, \dots, L-1$ 不丢失的情况下，式(3.3-9)表示的离散直方图反变换才满足 3.3.1 节中的条件(a')和(b)。

3.11 一幅灰度范围在 $[0, 1]$ 内的图像的概率密度函数 $p_r(r)$ 如右图所示。现对此图像进行灰度变换，使其灰度分布为所示的 $p_z(z)$ 。假设灰度值连续，求完成这一要求的变换(表示为 r 和 z 的函数)。



★3.12 试提出一种如 3.3.3 节中讨论的局部增强技术的局部直方图修正方法。

3.13 有两幅图像 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ ，它们的直方图分别为 h_f 和 h_g 。

给出根据 h_f 和 h_g 确定如下直方图的条件，并解释如何获得每种情形下的直方图：

- ★(a) $f(x, y) + g(x, y)$ 。
- (b) $f(x, y) - g(x, y)$ 。
- (c) $f(x, y) \times g(x, y)$ 。
- (d) $f(x, y) \div g(x, y)$ 。
- (e) $f(x, y) * g(x, y)$ 。

3.14 右侧所示的图像是很不同的，但它们的直方图却相同。假设每一幅图像都用一个 3×3 均值模板来进行模糊处理。



- (a) 模糊后图像的直方图还相同吗？试解释原因。
- (b) 如果您的答案是不相同，画出两个直方图。

3.15 线性空间滤波的实现要求在整幅图像中移动模板的中心点，并且在每个位置计算模板系数与该位置相应像素值的乘积之和(见 3.4 节)。一个低通滤波器可以用置所有系数为 1 的模板来实现，可使用所谓的盒状滤波器或移动均值算法，该方法由仅更新从一个位置到下一个位置变化的计算部分组成。

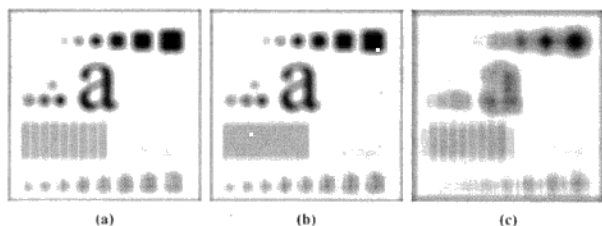
★(a) 以公式形式给出一个 $n \times n$ 滤波器的算法，说明涉及的计算规律，以及用于围绕图像移动模板的扫描序列。

(b) 大规模执行的计算量与盒状滤波器算法执行的计算量的比值，称为计算优势。在本例情况下求出计算优势，并作为 n 的函数画一条曲线，其中 $n > 1$ 。由于这两种处理方法的标定参数都是 $1/n^2$ ，因此在获得计算优势时根本不用考虑它的影响。假设图像有 0 的外部边界，这个边界宽到足以让我们在分析中忽略边界的影响。

3.16 ★(a) 假如采用如式(3.4-2)定义的卷积方法用空间滤波模板 $w(x, y)$ 对图像 $f(x, y)$ 滤波，其中模板在两个空间方向上都小于图像。证明如下重要特性：如果模板的系数之和是 0，则得到的卷积阵列(被滤波的图像)中所有元素之和也是 0(您可以忽略计算的不准确性)。另外，您可以假设图像的边界已用合适数量的 0 填充过。

(b) 如果用式(3.4-1)定义的相关方法来实现滤波，问得到的结果与(a)的结果相同吗？

- 3.17 讨论用一个 3×3 低通空间滤波器反复对一幅数字图像处理的结果, 可以不考虑边界的影响。应用 5×5 滤波器时有何不同?
- 3.18 ★ (a) 在 3.5.2 节中谈到, (相对于背景而言) 孤立的暗或亮像素团块, 在它们的面积小于中值滤波器面积的一半时, 可被中值滤波器滤除(强迫为邻域的中值)。假设滤波器尺寸为 $n \times n$, n 为奇数, 解释为什么会这样。
- (b) 考虑一幅有不同像素团块的图像。假设一个团块中的所有点都比背景亮或暗(同一团块中不同时存在这两种情形), 并且每个团块的面积不大于 $n^2/2$ 。请问 n 符合什么条件时, 有一个或多个这样的团块像(a)中所说的那样被分离出来?
- ★3.19 (a) 试给出求一个 $n \times n$ 邻域的中值的步骤。
- (b) 试提出一种逐像素地移动邻域的中心来更新中值的技术。
- 3.20 (a) 在字符识别应用中, 文本页面图3.2(b)所示的阈值变换函数简化为二值图像。这遵循如下过程, 即细化字符直到它们成为全“0”背景上的一串“1”。由于有噪声存在, 故二值化和细化处理导致了字符的断开, 断开缝隙有 1~3 个像素宽。修复缝隙的一种方法是对二值图像使用均值模板来模糊它, 这样会在缝隙间桥接非零像素。试求出能执行该任务的均值模板的最小尺寸。
- (b) 桥接缝隙后, 为了转换回二值形式, 要对图像进行阈值处理。根据您在(a)中得出的答案, 完成这一任务且不再产生断线所要求的最小阈值是多少?
- ★3.21 以下所示的三幅图像是分别通过尺寸为 $n = 23, 25$ 和 45 的方形均值模板处理后的模糊图像。图(a)和图(c)中左下角的垂直竖条被模糊了, 但竖条与竖条之间的分割仍然很清楚。然而, 尽管产生这幅图像的模板要比处理图像(c)的小得多, 但图(b)中的竖条却已经融在了一起。试解释这一现象的原因。



- 3.22 考虑图 3.34 所示的应用, 该应用的目的是消除图像中比 $q \times q$ 像素方形包围的物体小的目标。假设想要将目标的平均灰度减少为原来平均灰度的 $1/10$ 。使用这种方法, 那些目标可以接近背景灰度并用阈值法消除。给出平均模板的最小尺寸(奇数), 该模板仅对整幅图像处理一次就可将平均灰度级减少到所希望的程度。
- 3.23 在给定应用中, 一个均值模板被用于输入图像以减少噪声, 然后再用一个拉普拉斯模板来增强图像中的细节。如果交换一下这两个步骤的顺序, 结果是否会相同?
- ★3.24 证明如式(3.6-3)所示的拉普拉斯变换是各向同性的(旋转不变的)。您将需要下列轴旋转 θ 角的坐标方程:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta\end{aligned}$$

其中 (x, y) 为未旋转的坐标, 而 (x', y') 为旋转后的坐标。

- ★3.25 您在图 3.38 中看到中心为 -8 的拉普拉斯模板所得到的结果, 要比中心为 -4 的模板所得到的结果清晰一些。详细说明其原因。

3.26 参考习题 3.25。

(a) 若使用一个类似拉普拉斯的较大模板, 如中心系数为 -24 的 5×5 模板, 问是否可得到更加清晰的结果? 详细解释一下。

(b) 当该模板的大小与图像大小相等时, 会发生什么情况?

3.27 给定一个 5×5 模板, 使用该模板来对一幅图像执行非锐化模板处理。假设均值图像使用高斯滤波器得到。

★3.28 使用式(3.6-6)给出的拉普拉斯定义, 证明从一幅图像中减去相应的拉普拉斯图像等同于对图像进行非锐化模板处理。

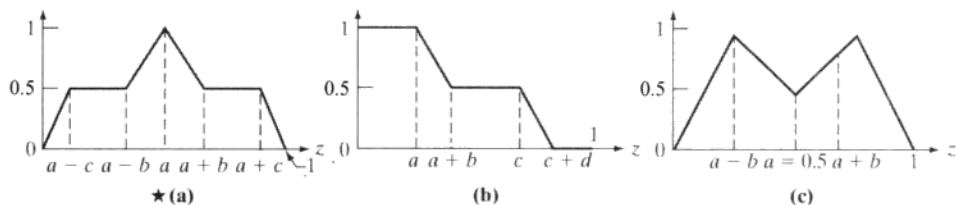
3.29 (a) 证明式(3.6-11)给出的梯度幅值是一种各向同性的操作(见习题 3.24)。

(b) 如果使用式(3.6-12)计算梯度, 证明其将失去各向同性这一性质。

3.30 使用一台 CCD 电视摄像机对某一区域用于每天 24 小时、每月 30 天对同一区域进行长期观测研究。每 5 分钟拍摄一次数字图像并传送到中心场所。场景的照明白天为自然光, 晚上为人工造光, 没有无照明的时间, 因此总可以获得一幅图像。由于照明的范围总是在摄像机的线性工作范围, 因此摄像机本身并不需要使用任何补偿装置。另外, 使用数字技术对图像进行后处理并归一化, 这样就使得图像与恒定照明是等效的。对此, 请设计一种方法。您可以自由使用您希望的任何方法, 但必须在设计中明确给出所有的假设。

3.31 证明图 3.46(d) 中的交叉点由 $b = (a + c)/2$ 给出。

3.32 使用 3.8.2 节定义的模糊集合和图 3.46 中的基本的隶属度函数, 形成下列隶属度函数。



★3.33 在 3.8.5 节讨论的模糊滤波方法中, 增大邻域的尺寸会产生什么影响? 对您的回答解释其原因(您可以用一个例子来支持您的答案)。

3.34 为了减少一幅具有区间 $[0, L-1]$ 内的灰度值的含噪图像的脉冲噪声影响, 如 3.8.5 节那样, 设计一个基于规则的模糊系统。为简化问题, 仅在一个 3×3 邻域中使用差值 d_2, d_4, d_6 和 d_8 。在图像的任何位置, 令 z_5 表示邻域中心的灰度。相应的输出灰度值应是 $z'_5 = z_5 + v$, 其中 v 是您的模糊系统的输出。也就是说, 您的模糊系统的输出是一个用于减少可能出现在该 3×3 邻域中心的噪声峰值效应的校正因子。假设出现的噪声峰值间距足够大, 因此, 不必关心在同一邻域内出现多个噪声峰值。这些峰值可以是暗的或亮的。全部使用三角形隶属度函数。

★(a) 给出该问题的一条模糊语句。

★(b) 指定 IF-THEN 规则和 ELSE 规则。

(c) 如图 3.57 那样, 以图形方式指定隶属度函数。

(d) 如图 3.58 那样, 给出规则集的图形表示。

(e) 请您给出一个类似于图 3.52 的模糊系统的简略图。