频率域滤波

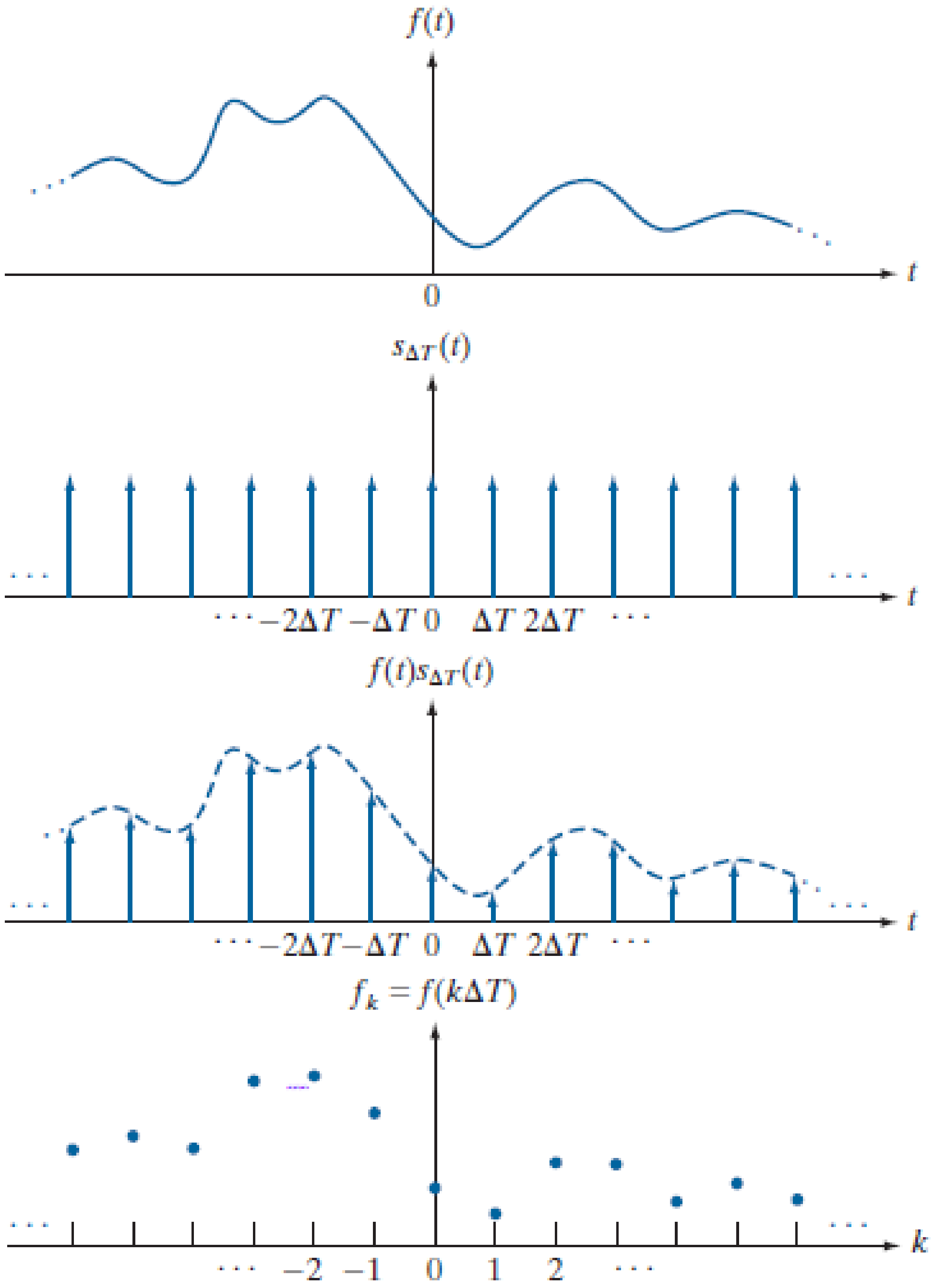
- 4.1　背景
- 4.2　基本概念
- 4.3　取样和取样函数的傅立叶变换
- 4.4　单变量的离散傅立叶变换
- 4.5　两个变量的扩展
- 4.6　二维离散傅立叶变换的一些性质
- 4.7　频率域滤波基础
- 4.8　频率域滤波器平滑图像
- 4.9　频率域滤波器锐化图像
- 4.10 选择性滤波

§4.2 基本概念

- 4.2.1 复数
- 4.2.2 傅立叶级数的表示方式
- 4.2.3 冲激及其取样特性
- 4.2.4 连续变量函数的傅立叶变换
- 4.2.5 卷积

$$f(t)\star h(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(\mu)F(\mu)$$

$$f(t)h(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(\mu)\star F(\mu)$$

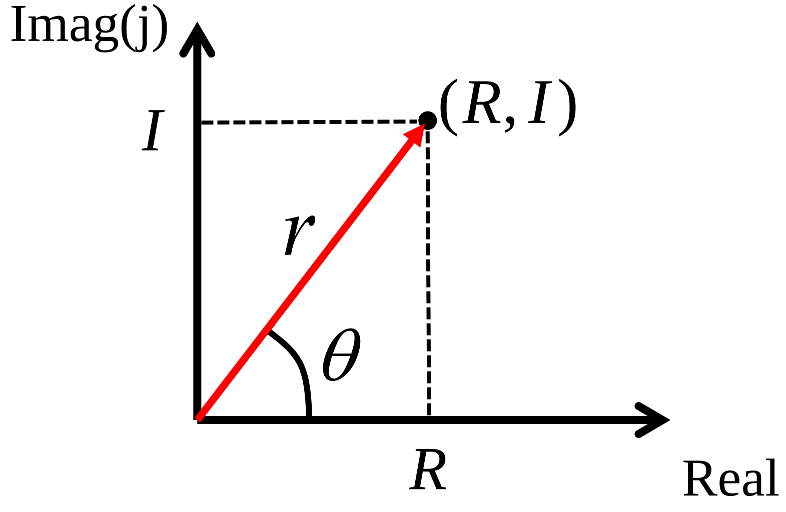


§4.2.1 复数

复数:

$$C = R + jI$$

其中 $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$



极坐标:

$$C = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{R^2 + I^2}$$

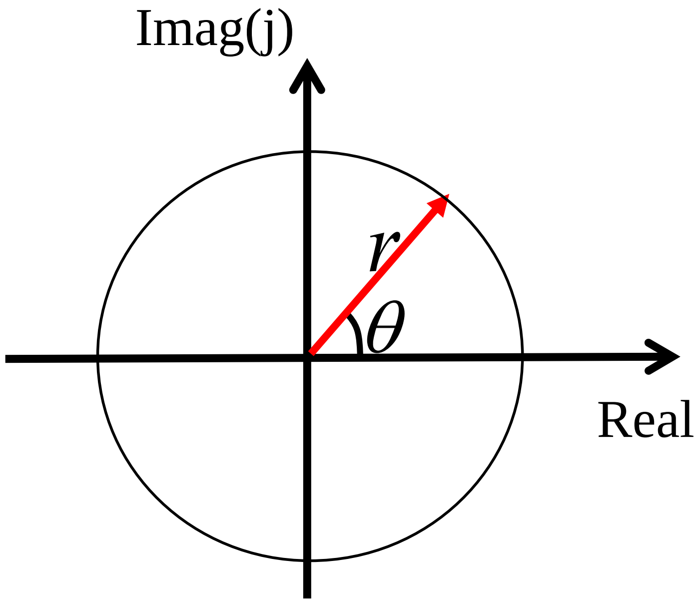
$$\theta = \arctan\left(\frac{I}{R}\right)$$

指数形式:

$$C = re^{\mathrm{j}\theta}$$

欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

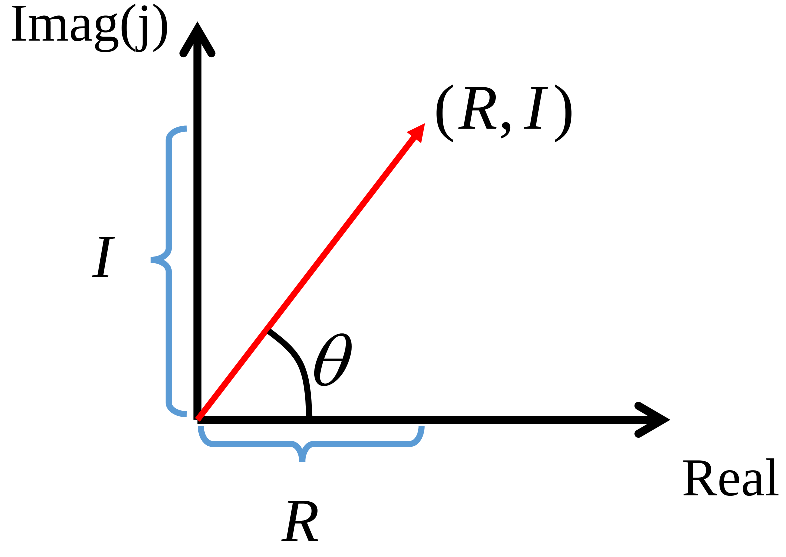


§4.2.1 复数

复数：

$$C = R + jI$$

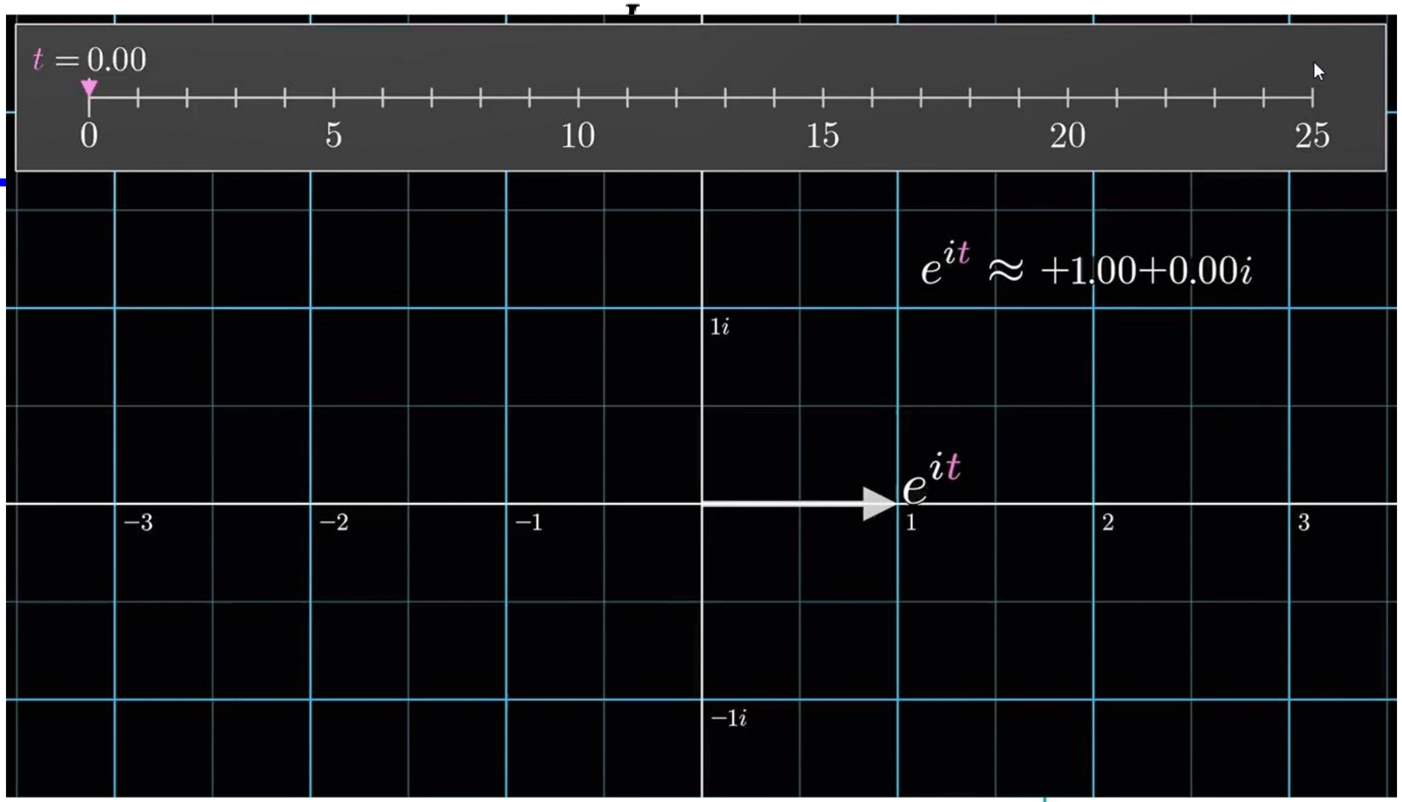
其中 $j = \sqrt{-1}$



极坐标：

$$C = |C|(\cos\theta + j\, sin\theta)$$

$$|C| = r = \sqrt{R^2 + I^2}$$



From: 3Blue1Brown https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k

§4.2.2 傅立叶级数的表示方式

满足一定条件的周期 (T=2l) 函数均可表示成不同频率的正弦和余弦函数的加权和:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\begin{cases} a_n=\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, & (n=0,1,2,\ldots) \\ b_n=\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, & (n=1,2,3\ \ldots) \end{cases}$$

三角函数形式

三角函数 → $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ 欧拉公式 → 指数(复数)函数

$$\cos(\theta)=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$$

$$\sin(\theta)=-\frac{i}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

傅立叶级数复数形式:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-l}^{l}f(x)\,e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,\quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

傅立叶级数三角函数形式：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\begin{cases} a_n=\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, & (n=0,1,2,\ldots) \\ b_n=\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, & (n=1,2,3\ldots) \end{cases}$$

傅立叶级数复数形式:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\boxed{\frac{n\pi x}{l}}}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-l}^{l}f(x)\,e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx,\quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

$$\boxed{c_n}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\boxed{c_{-n}}e^{i\frac{-n\pi x}{l}}=\text{实函数}$$

傅立叶级数三角函数形式：

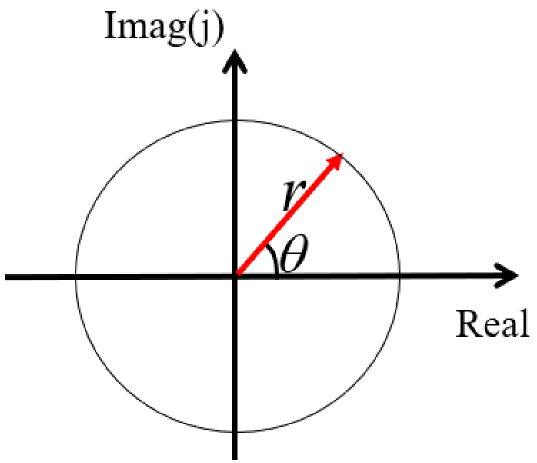
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

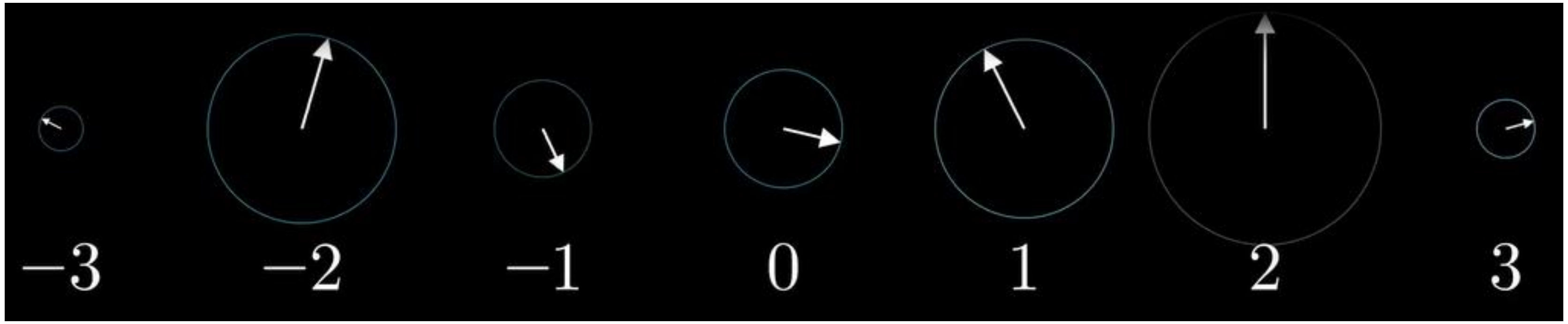
$$\begin{cases} a_n = \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, & (n = 0,1,2,\ldots) \\ b_n = \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, & (n = 1,2,3\ldots) \end{cases}$$

傅立叶级数复数形式:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$$

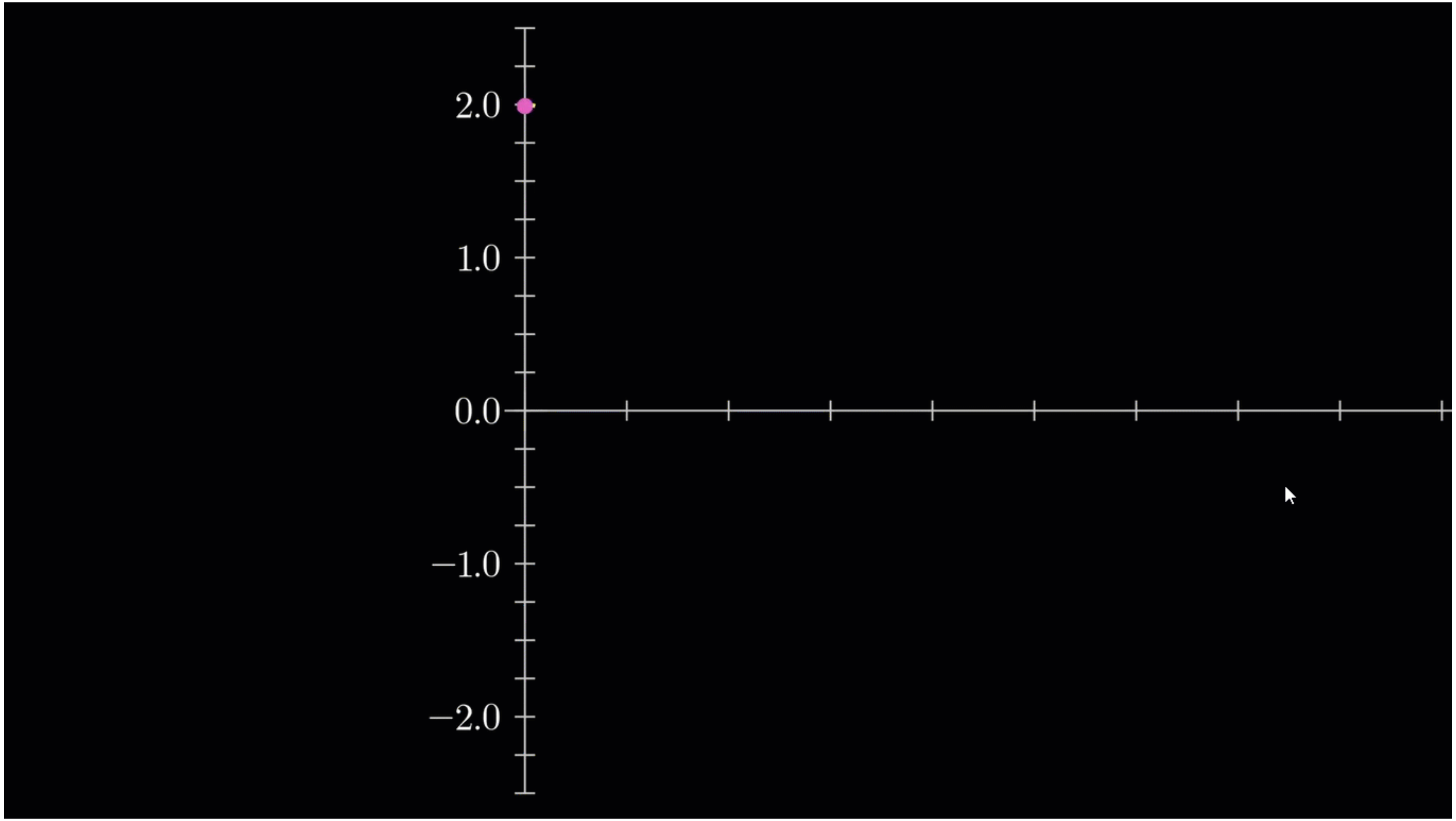
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx, \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$





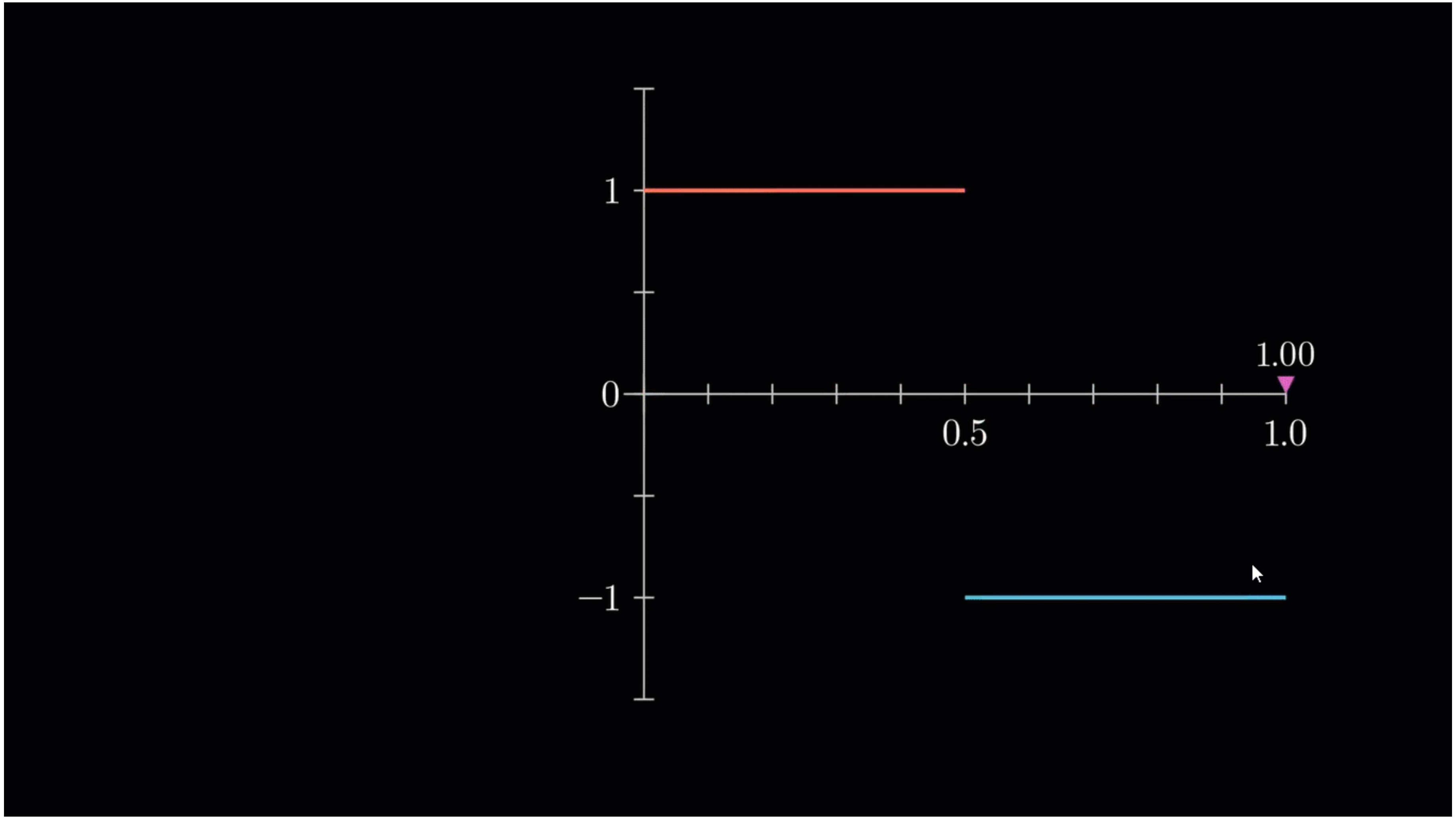
§4.2.2 傅立叶级数的表示方式

$$f(x) = 2\cos x$$



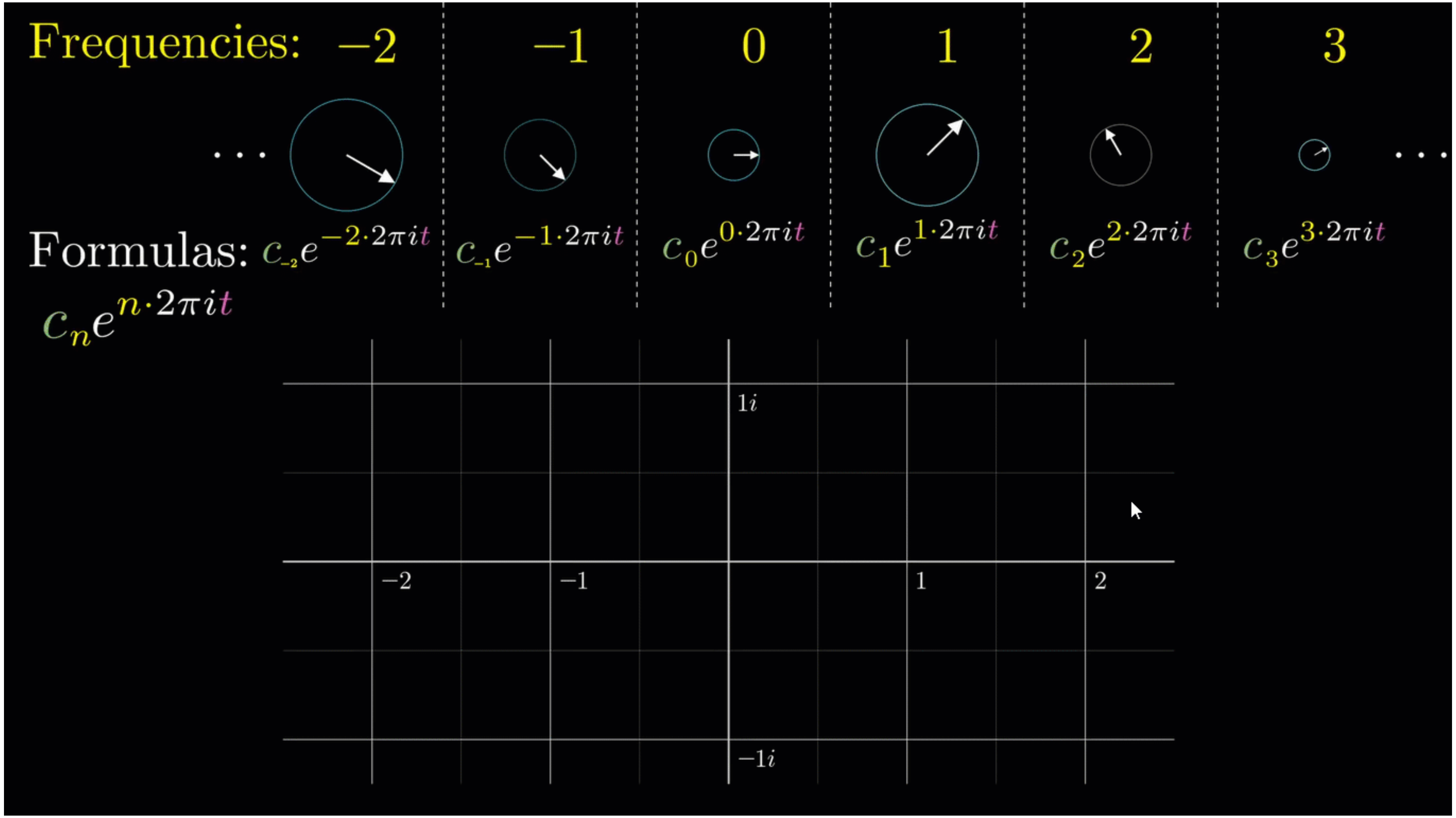
From: 3Blue1Brown https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k

§4.2.2 傅立叶级数的表示方式



From: 3Blue1Brown https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k

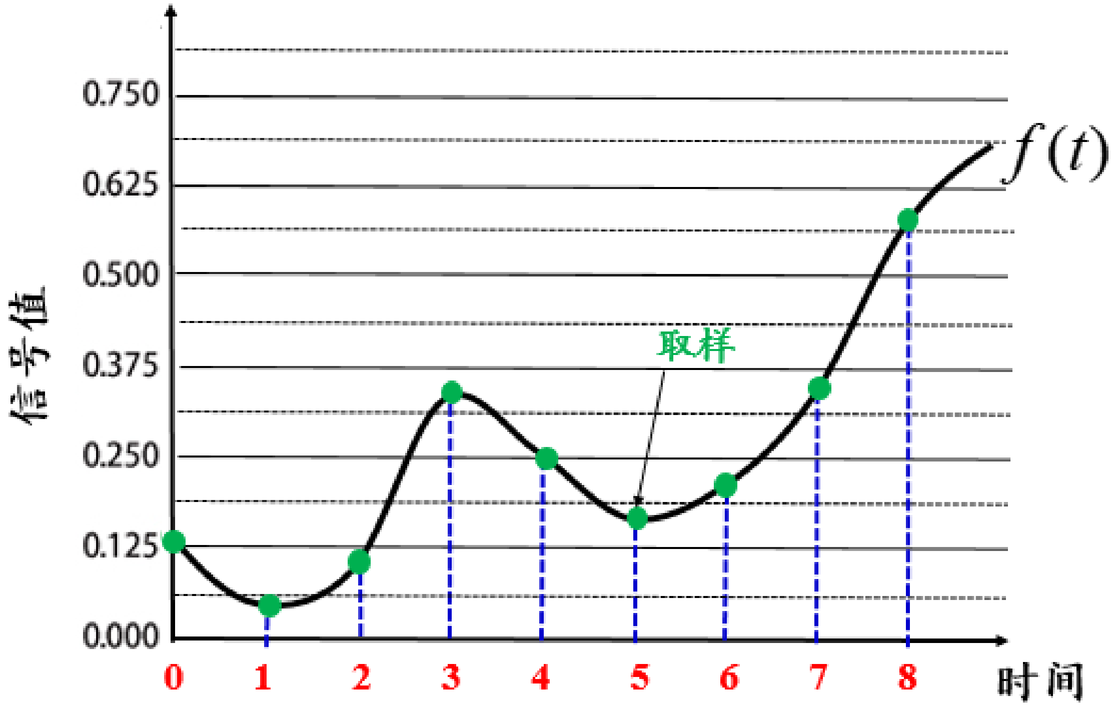
§4.2.2 傅立叶级数的表示方式



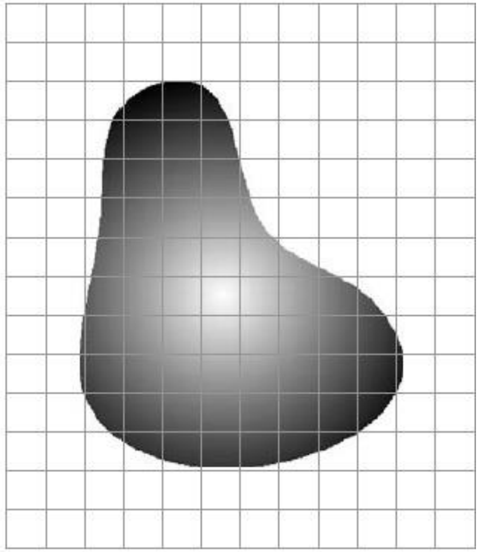
From: 3Blue1Brown https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k

§4.2.3 冲激及其取样特性

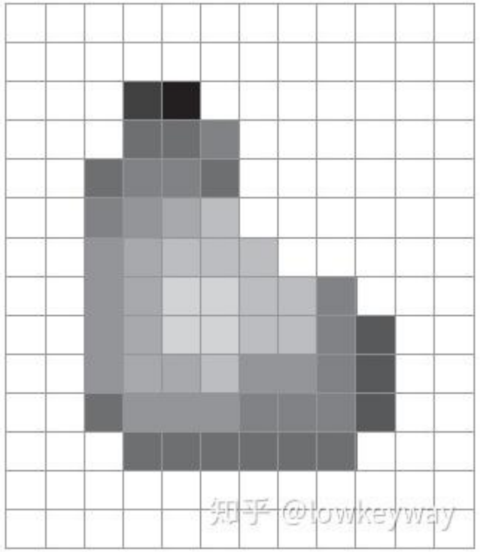
采样



离散信号



模拟图像



数字图像

§4.2.3 冲激及其取样特性

- **单位冲激函数**

$$\boxed{\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}}$$

物理上，将t解释为时间，单位冲激函数可当做是幅度无限，持续时间为0，具有单位面积的尖峰信号

同时还需满足 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$

★ 取样特性 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$

任意点t_0的冲激，表示为$\delta(t-t_0)$，取样特性一般形式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

- **单位离散冲激**

$$\boxed{\delta(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}}$$

x为离散变量

同时还需满足 $\sum_{x=-\infty}^{\infty}\delta(x)=1$

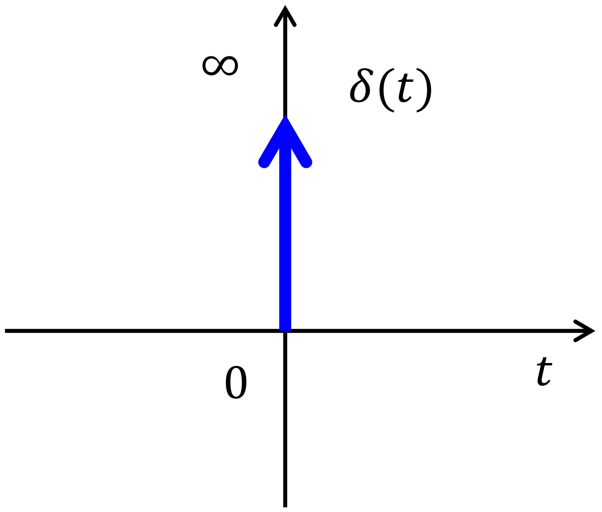
取样特性 $\sum_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)=f(0)$

一般形式：

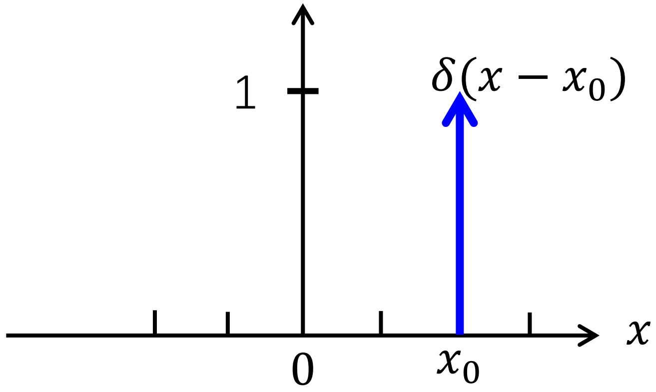
$$\sum_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)dt=f(x_0)$$

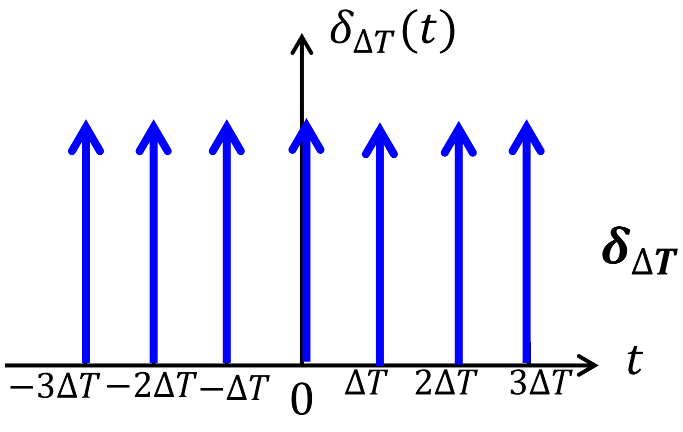
§4.2.3 冲激及其取样特性

- 单位冲激函数



- 单位离散冲激





$$\boldsymbol{\delta_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T)}$$

§4.2.4 连续变量函数的傅立叶变换

傅立叶变换(Fourier Transform) vs. 傅立叶级数 (Fourier Series)

傅立叶级数仅用来表示周期函数,而傅立叶变换可以表示非周期函数

傅立叶级数

频域离散

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi t}{l}}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-i\frac{n\pi t}{l}} dt, \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots)}$$

傅立叶变换

$$\boxed{F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt}$$

频域连续

From 时域 to 频域

傅立叶逆变换

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

From 频域 to 时域

§4.2.4 连续变量函数的傅立叶变换

例4.1 求一个简单函数的傅立叶变换

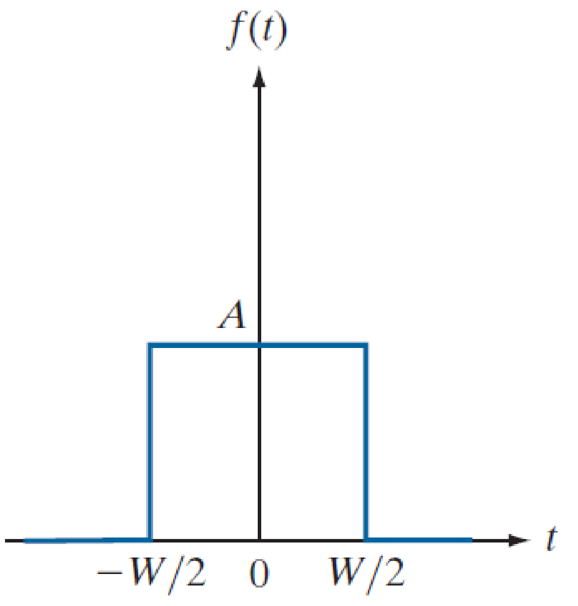
$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} Ae^{-j2\pi\mu t}dt$$

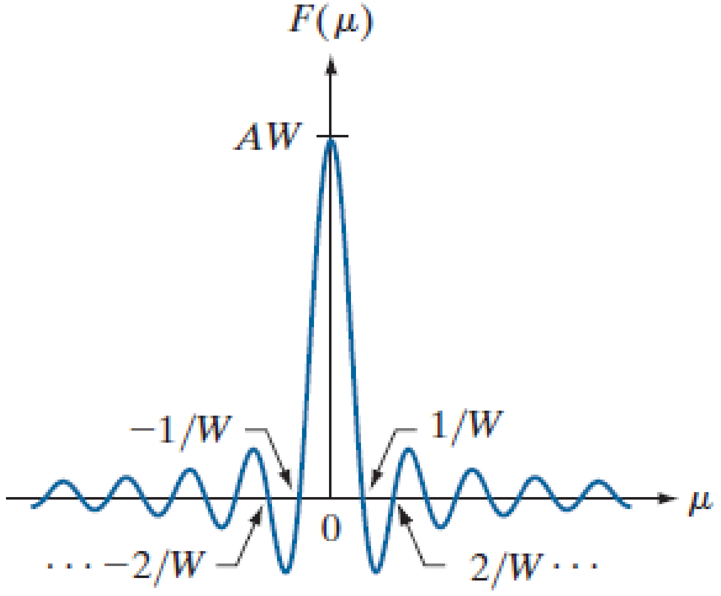
$$=\frac{A}{j2\pi\mu}\left[e^{j\pi\mu W}-e^{-j\pi\mu W}\right]$$

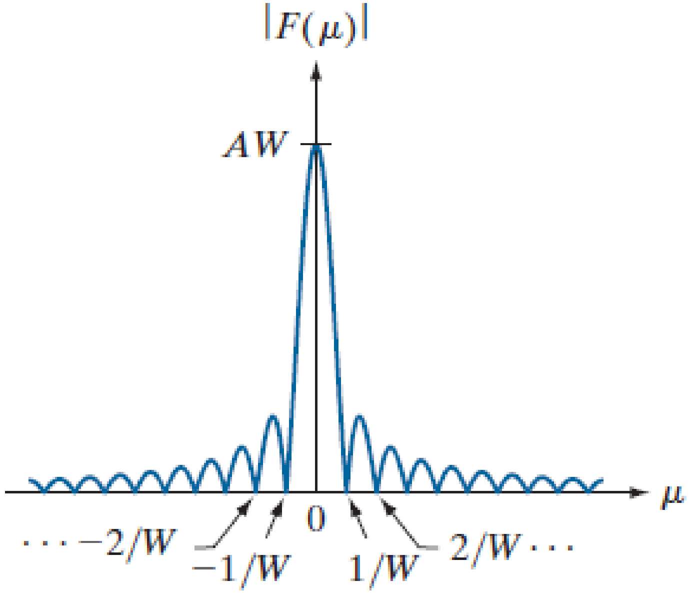
$$=AW\boxed{\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}}$$

$$=AW\,sinc(\mu W)$$

$$sinc(m)=\frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}=\begin{cases}1, & m=0\\0, & m\neq 0\end{cases}$$





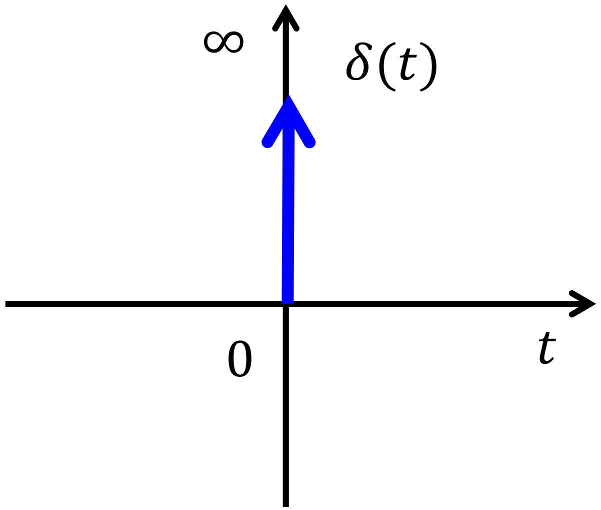


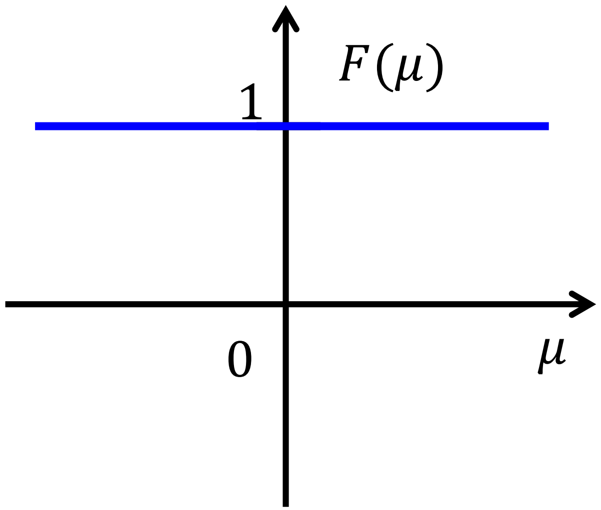
§4.2.4 连续变量函数的傅立叶变换

- **考虑冲激函数和冲激串的傅立叶变换**

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi\mu t}dt=e^{-j2\pi\mu 0}=e^{0}=1$$



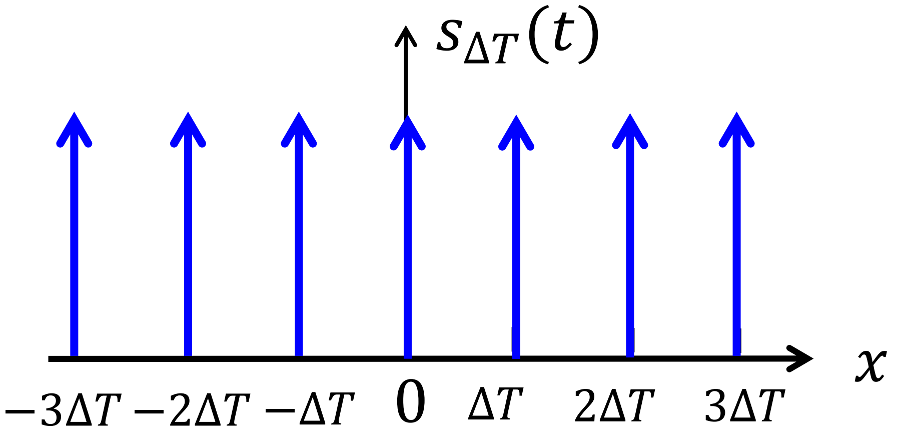


结论：一个空间域原点的冲激的傅立叶变换，在频域中是一个常数。

位于$t=t_0$的冲激$\delta(t-t_0)$的傅立叶变换为？ $F(\mu)=e^{-j2\pi\mu t_0}$

§4.2.4 连续变量函数的傅立叶变换

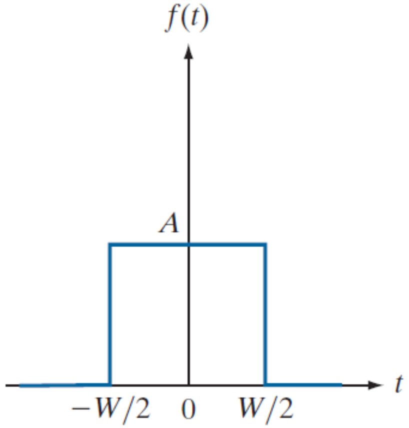
- **冲激串函数的傅立叶变换**

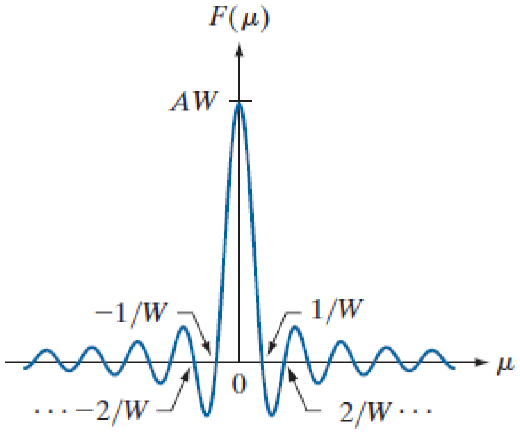


$$s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T)$$

$$S(\mu)=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)$$

周期为ΔT的冲激串函数的傅立叶变换仍是冲激串，其周期为$\frac{1}{\Delta T}$

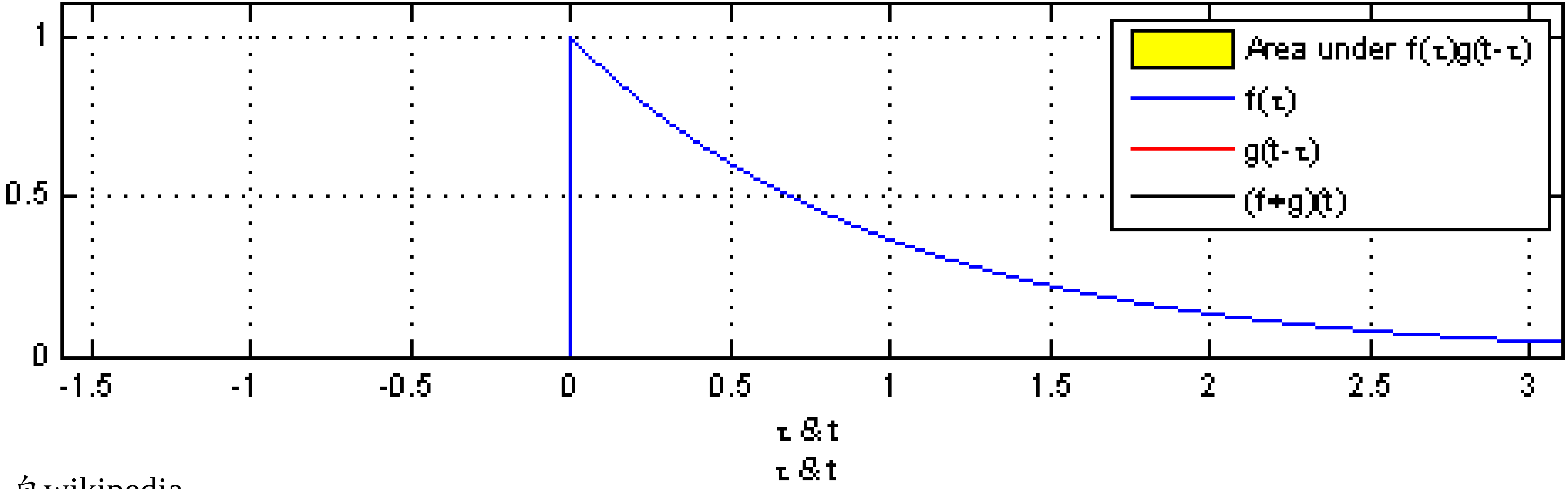




§4.2.5 卷积

连续变量t的连续函数$f(t)$和$h(t)$的卷积

$$f(t)\star h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

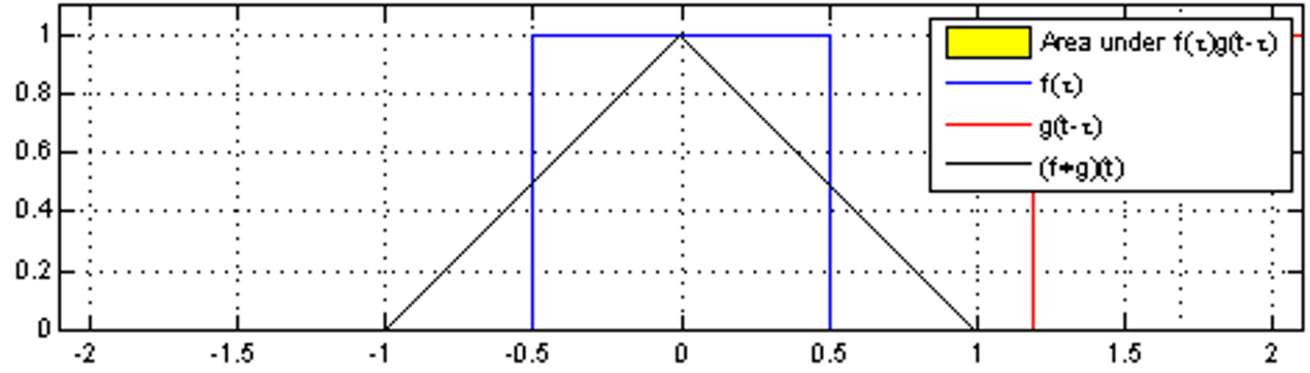


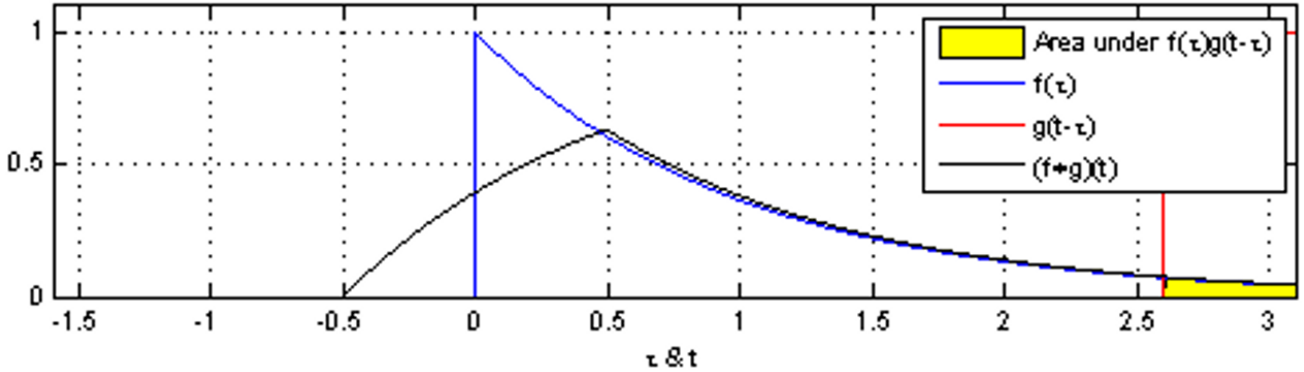
来自wikipedia

§4.2.5 卷积

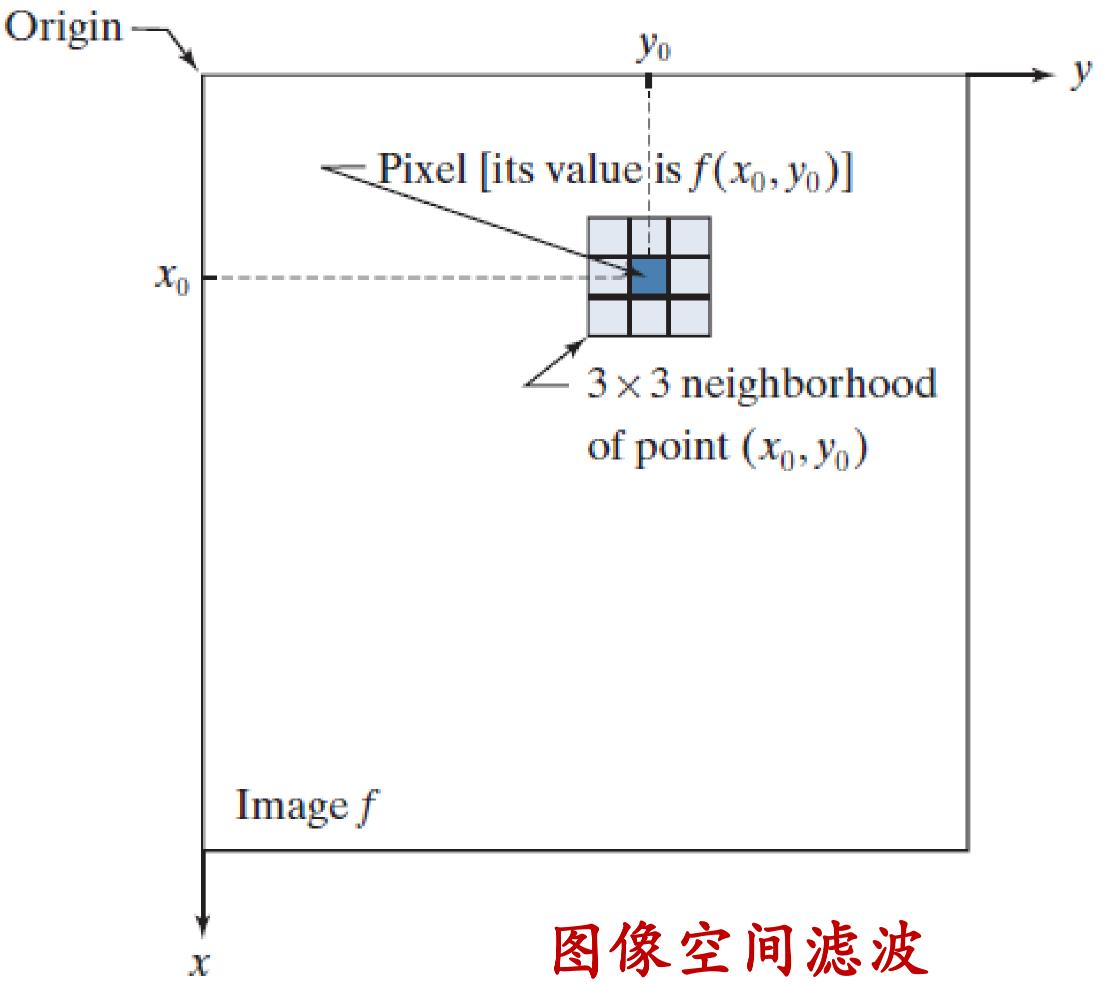
连续变量t的连续函数$f(t)$和$h(t)$的卷积

$$f(t)\bigstar h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$





$$\sum\sum w(s,t)f(x-s,y-t)。$$



图像空间滤波

§4.2.5 卷积

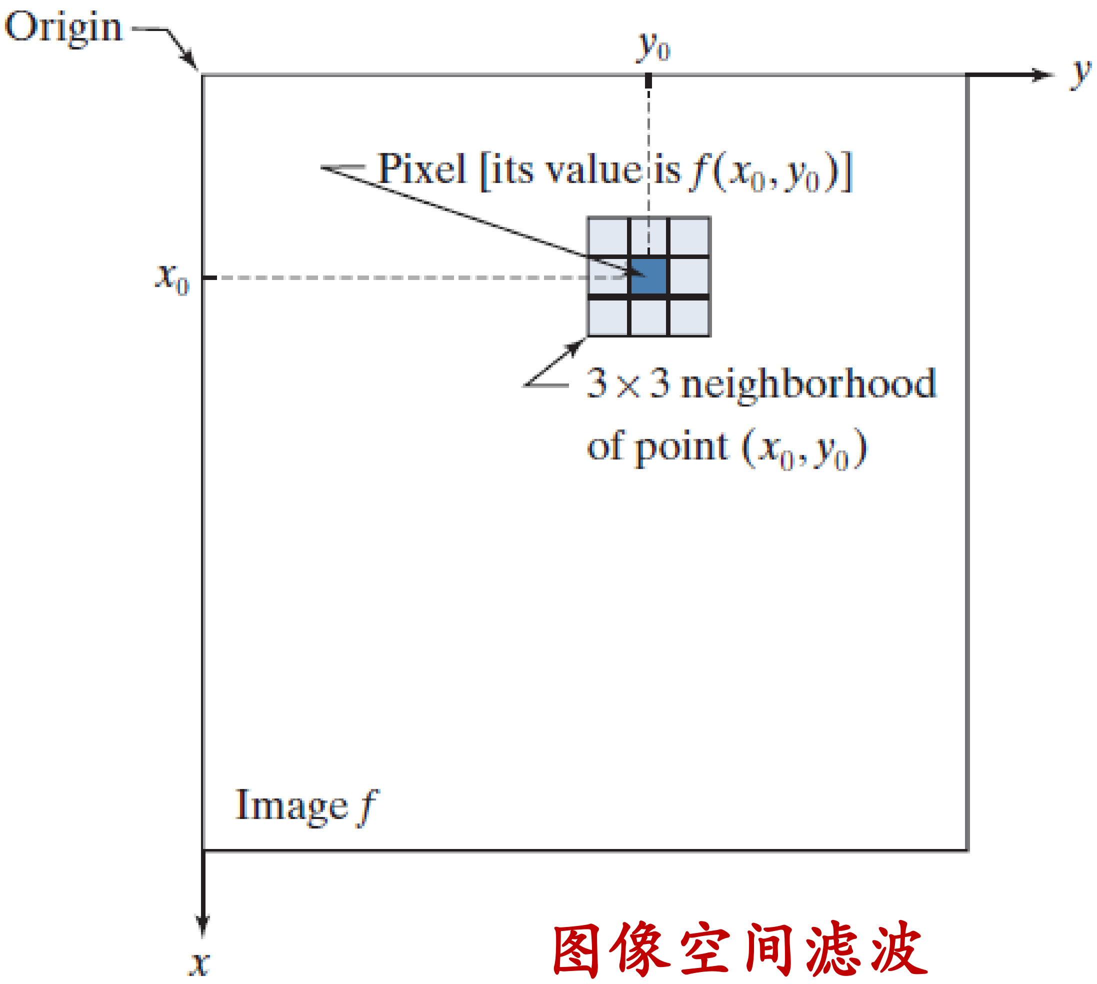
连续变量t的连续函数$f(t)$和$h(t)$的卷积

$$f(t)\star h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$\sum\sum w(s,t)f(x-s,y-t)$。

原始图像

卷积操作后



图像空间滤波

§4.2.5 卷积

卷积定理

1. 空间域中两个函数的卷积的傅立叶变换 = 两个函数的傅立叶变换在频率域中的乘积

$$f(t) \star h(t) \Longleftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

2. 频率域的卷积可通过空间域的乘积得到

$$f(t)h(t) \Longleftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$