频率域滤波

- 4.1 背景
- 4.2 基本概念
- 4.3 取样和取样函数的傅立叶变换
- 4.4 单变量的离散傅立叶变换
- 4.5 两个变量的扩展
- 4.6 二维离散傅立叶变换的一些性质
- 4.7 频率域滤波基础
- 4.8 频率域滤波器平滑图像
- 4.9 频率域滤波器锐化图像
- 4.10 选择性滤波

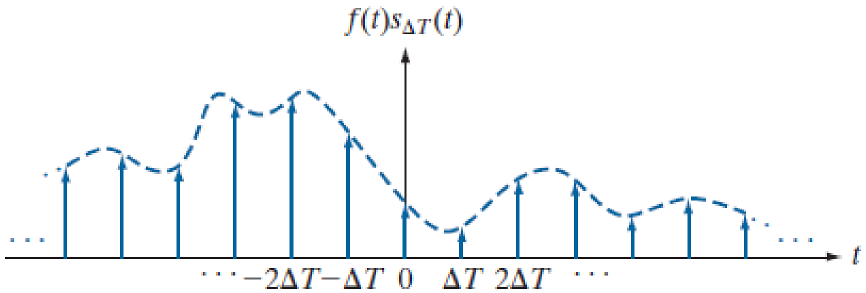
§4.4 单变量的离散傅立叶变换（DFT）

$$\tilde{f}(t) = f(t)S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

取样后的函数$\tilde{f}(t)$的傅里叶变换：

$$\tilde{F}(\mu) = F(\mu) \star S(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)S(\mu-\tau)d\tau = \frac{1}{\Delta T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T})\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\mu - \frac{n}{\Delta T})$$

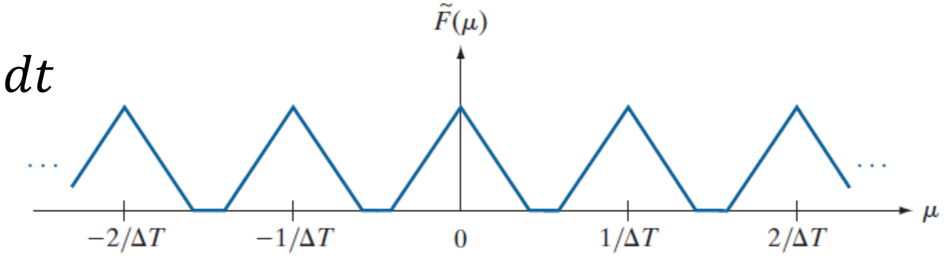


由傅里叶变换定义得

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-2j\pi\mu t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\triangle T)e^{-2j\pi\mu t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\triangle T)e^{-2j\pi\mu t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\triangle T)e^{-j2\pi\mu n\Delta T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$



$\tilde{F}(u)$是周期为$\frac{1}{\Delta T}$的无限周期连续函数，对

$\tilde{F}(u)$进行一个周期的取样是DFT的基础

§4.4 单变量的离散傅立叶变换（DFT）

假设在周期$\mu = 0$到**$1/\triangle T$**之间得到$\tilde{F}(u)$的M个等间距的样本。可通过在如下频率处取样得到：

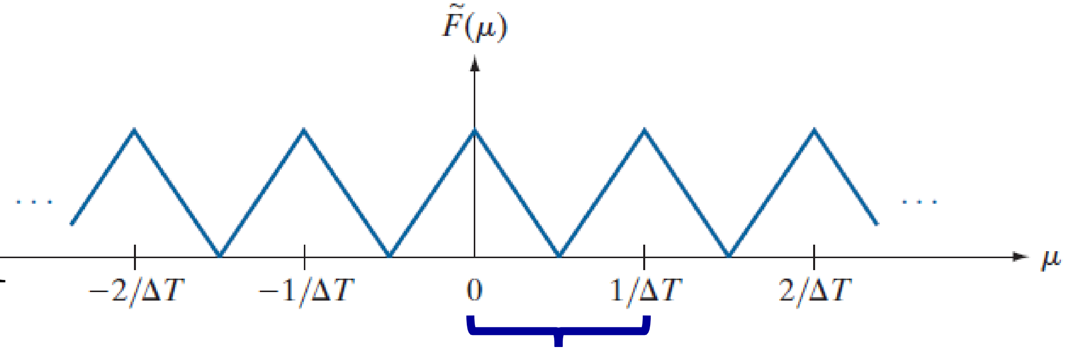
$$\mu = \frac{m}{M \triangle T}, m = 0,1,2,\cdots,M-1$$

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n \triangle T) e^{-j2\pi\mu n\Delta T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

$$\boxed{F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n}, m = 0,1,2,\cdots,M-1}$$

给定一个由$f(t)$的M个样本组成的集合$\{f_n\}$,可以得到一个与输入样本集合离散傅里叶变换相对应的M个复数离散值的样本集合$\{F_m\}$。

$$\boxed{f_n = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M}, n = 0,1,2,\cdots,M-1}$$



§4.4 单变量的离散傅立叶变换（DFT)

离散傅里叶变换(DFT)适用于任何均匀取样的有限离散样本集。

离散傅里叶变换 (DFT)

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n}, m = 0,1,2,\cdots,M-1 \qquad F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}, u = 0,1,2,\cdots,M-1$$

离散傅里叶变换 (IDFT, inverse discrete fourier transform)

$$f_n = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M}, n = 0,1,2,\cdots,M-1 \qquad f(x) = \frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}, x = 0,1,2,\cdots,M-1$$

具有周期性 $F(u) = F(u+kM)$ $f(x) = f(x+kM)$

§4.4 单变量的离散傅立叶变换（DFT）

如果$f(x)$由函数$f(t)$以∇T为单位间隔取样后的M个样本组成，则包含集合$\{f(x)\}, m = 0,1,2,\cdots,M-1$的记录的持续时间为

$$T = M \triangle T$$

离散频率域中的相应间隔：

$$\triangle u = \frac{1}{M \triangle T} = \frac{1}{T}$$

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}, u = 0,1,2,\cdots,M-1$$

$$u = \frac{m}{M \triangle T}, m = 0,1,2,\cdots,M-1$$

由DFT的M个分量跨越的整个频率范围：

$$\Omega = M \triangle u = \frac{1}{\triangle T}$$

频率域滤波

- 4.1 背景
- 4.2 基本概念
- 4.3 取样和取样函数的傅立叶变换
- 4.4 单变量的离散傅立叶变换
- 4.5 两个变量的扩展
- 4.6 二维离散傅立叶变换的一些性质
- 4.7 频率域滤波基础
- 4.8 频率域滤波器平滑图像
- 4.9 频率域滤波器锐化图像
- 4.10 选择性滤波

§4.5 两个变量的离散傅里叶变换

- **二维冲激及其取样特性—连续变量**

两个连续变量 t 和 z 的冲激定义为

$$\delta(t,z)=\begin{cases}\infty, & t=z=0\\ 0, & other\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t,z)dtdz=1$$

二维冲激在积分下也有一维情况下的取样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)\delta(t,z)dtdz=f(0,0)$$

更一般地，位于坐标(t_0,z_0)处的冲激

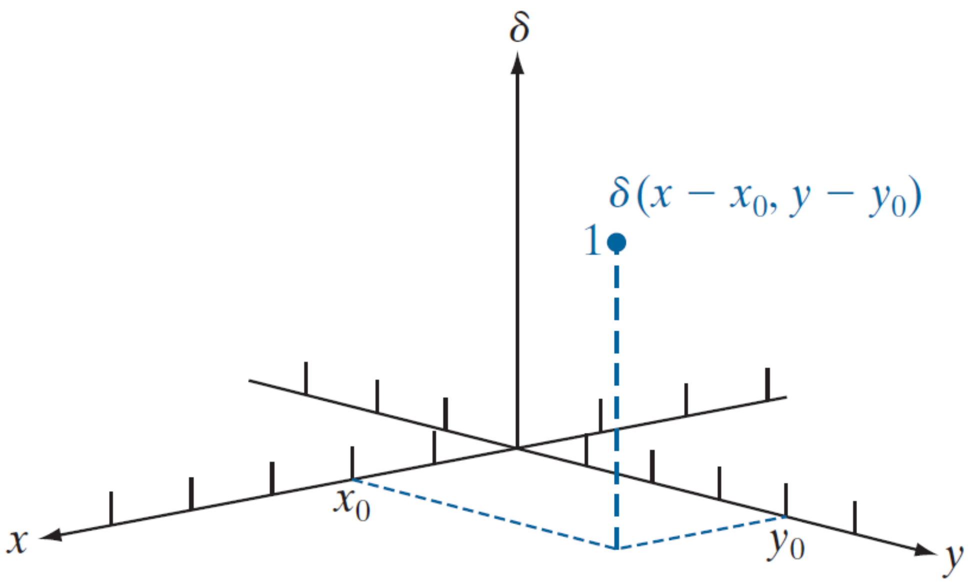
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)\delta(t-t_0,z-z_0)dtdz=f(t_0,z_0)$$

§4.5 两个变量的离散傅里叶变换

• 二维冲激及其取样特性—离散变量

二维离散冲激定义

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1, & x=y=0\\ 0, & other\end{cases}$$



二维离散冲激也有一维情况下的取样特性

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x,y)=f(0,0)$$

更一般地，位于坐标(x_0,y_0)处的冲激 $$\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x_0,y_0)$$

- **图像(二维离散函数)的傅立叶变换(DFT)对**

二维连续函数的傅立叶变换对

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

离散化

二维图像的傅立叶变换(DFT)对

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

N是图像的高度

M是图像的宽度

§4.5 两个变量的离散傅里叶变换

例4.5 一个简单函数的二维傅里叶变换

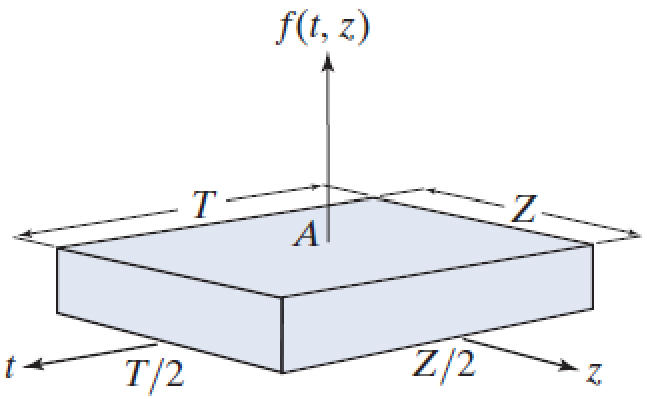
$$F(\mu,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t+vz)}dtdz$$

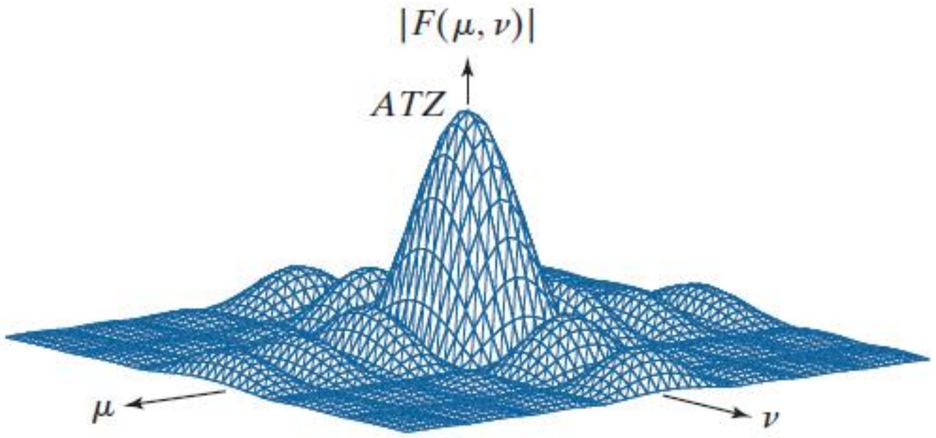
$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{Z}{2}}^{\frac{Z}{2}}Ae^{-j2\pi(\mu t+vz)}dtdz$$

$$=A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-j2\pi\mu t}dt\int_{-\frac{Z}{2}}^{\frac{Z}{2}}e^{-j2\pi vz}dz$$

$$=\frac{-A}{j2\pi\mu}\left[e^{-j2\pi\mu T}-e^{j2\pi\mu T}\right]\frac{-1}{j2\pi v}\left[e^{-j2\pi vZ}-e^{j2\pi vZ}\right]$$

$$=AT\frac{\sin(\pi\mu T)}{\pi\mu T}Z\frac{\sin(\pi vZ)}{\pi vZ}=\boxed{ATZ\left[\frac{\sin(\pi\mu T)}{\pi\mu T}\right]\left[\frac{\sin(\pi vZ)}{\pi vZ}\right]}$$





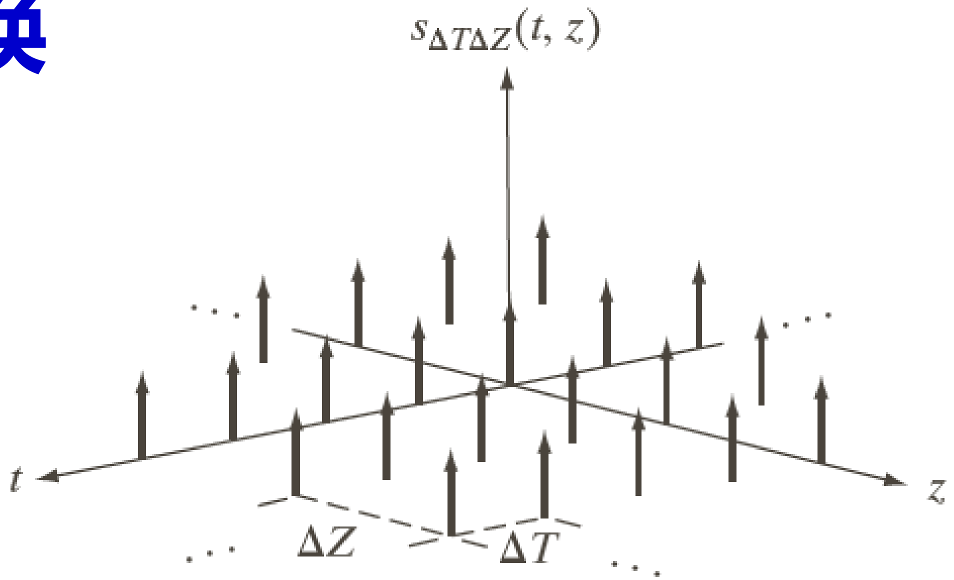
在频谱中零的位置与T和Z的值成反比

§4.5 两个变量的离散傅里叶变换

- ## 二维取样和二维取样定理

可用二维冲激串函数来完成取样过程

$$\delta_{\Delta T\Delta Z}(t,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-m\Delta T,z-n\Delta Z)$$



同一维情况下同，用$\delta_{\Delta T\Delta Z}(t,z)$乘以$f(t,z)$得到取样后的函数。

二维情况下，带限函数定义：$\boldsymbol{F(\mu,v)=0,|\mu|\geq\mu_{max}}$且$\boldsymbol{|v|\geq|v_{max}|}$，函数$f(t,z)$称为**带限函数**。

二维取样定理

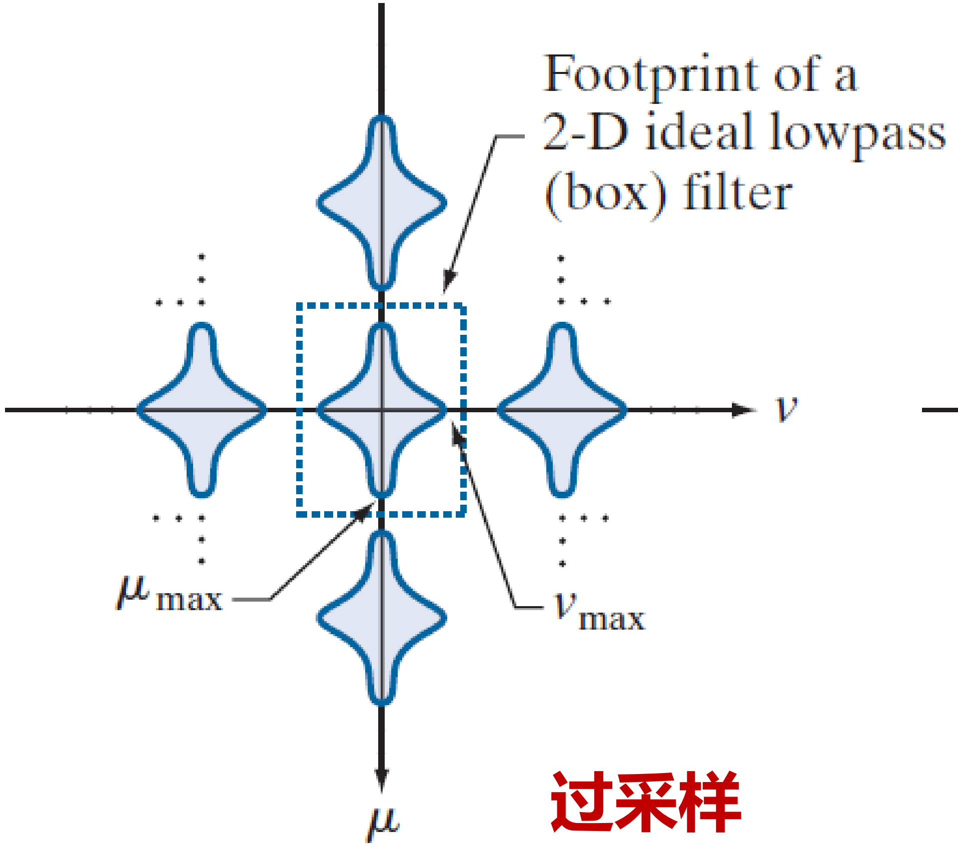
$$\Delta T<\frac{1}{2\mu_{max}}\qquad\qquad \frac{1}{\Delta T}>2\mu_{max}$$

取样率

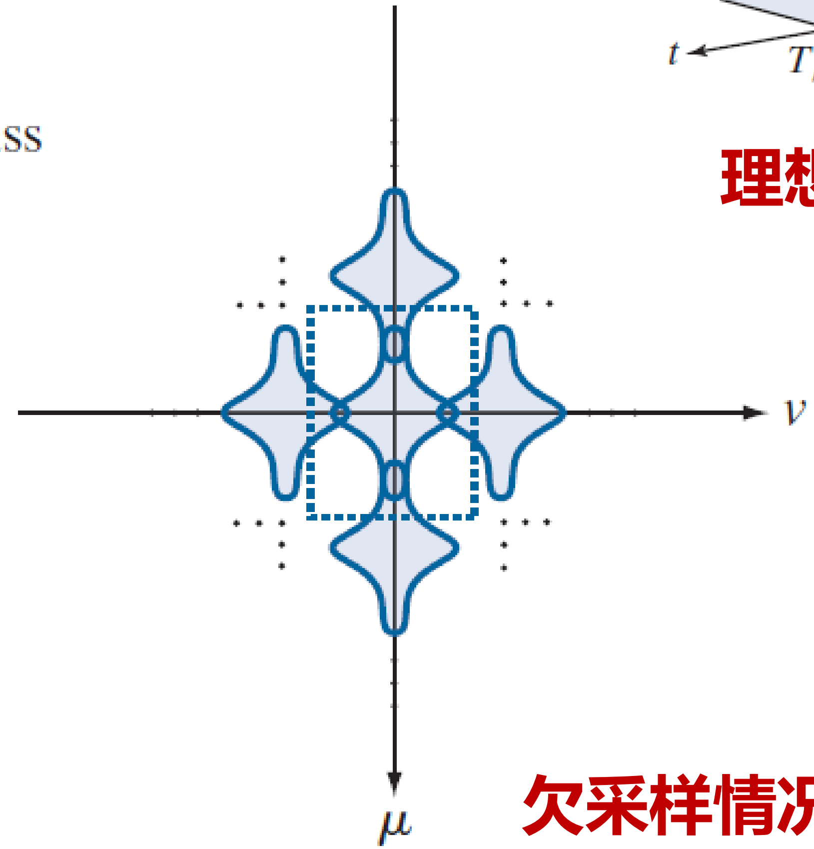
$$\Delta Z<\frac{1}{2v_{max}}\qquad\qquad \frac{1}{\Delta Z}>2v_{max}$$

如果一个二维带限连续函数$f(t,z)$在μ和v两个方向上，由以大于该函数最高频率两倍的取样率取样获得的样本表示，则没有信息丢失。即可以由其样本无误地恢复出$f(t,z)$

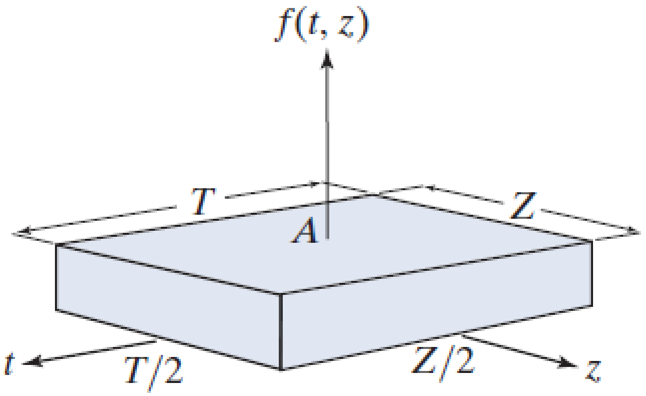
§4.5 两个变量的离散傅里叶变换



过采样



欠采样情况下将产生混淆

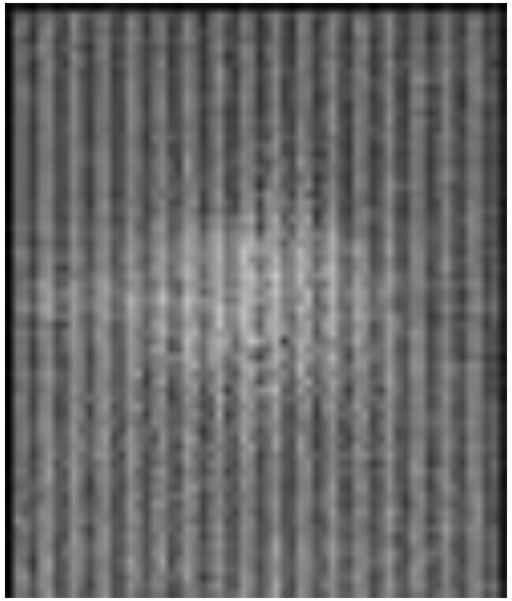


理想二维盒状滤波器

§4.5 两个变量的离散傅里叶变换

- **图像中的混淆**

*k*空间采集数据



MR图像

MR图像

§4.5 两个变量的离散傅里叶变换

- **图像内插和重取样**

$$f(t) = \mathfrak{I}^{-1}\{F(u)\} = \mathfrak{I}^{-1}\{H(u)\tilde{F}(u)\}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) sinc[\frac{t - n\Delta T}{\Delta T}]$$

一维情况下：

由样本集合完美地重建一个带限函数用取样值加权的$sinc$函数的无限求和来内插。

图像处理中:

二维内插最普通的应用是调整图像的大小（放大：过取样，缩小：欠取样）

✓放大：行列复制　缩小：行列删除

✓缩小图像前，为减少混淆，应“模糊”图像，频域滤波器滤波图像高频分量

§4.5 两个变量的离散傅里叶变换

- 图像内插和重取样