

频率域滤波

- 4.1 背景
- 4.2 基本概念
- 4.3 取样和取样函数的傅立叶变换
- 4.4 单变量的离散傅立叶变换
- 4.5 两个变量的扩展
- 4.6 二维离散傅立叶变换的一些性质
- 4.7 频率域滤波基础
- 4.8 频率域滤波器平滑图像
- 4.9 频率域滤波器锐化图像
- 4.10 选择性滤波

§4.6 二维离散傅立叶变换的性质

● 空间和频率间隔的关系

假定对连续函数 $f(t, z)$ 取样生成了一幅数字图像 $f(x, y)$ ，它由分别在 t 和 z 方向所取的 $M * N$ 个样点组成。令 ΔT 和 ΔZ 表示样本间的间隔，则相应离散频率域变量间的间隔分别由

$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta T}$$
$$\Delta v = \frac{1}{N \Delta Z}$$

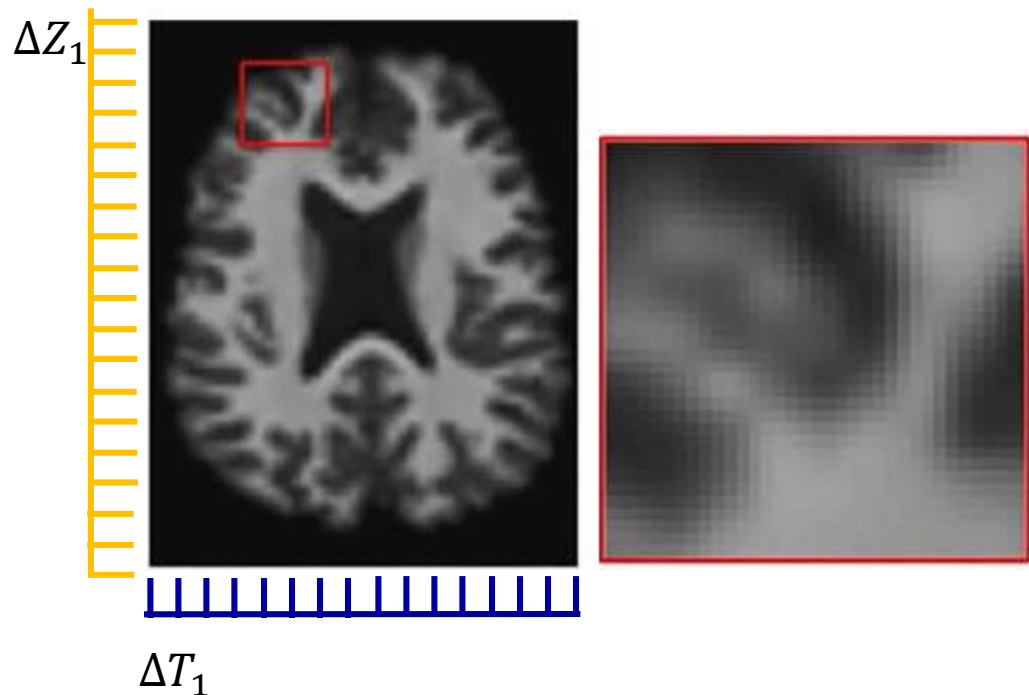
频率分辨率

$$\Omega_u = M \Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$
$$\Omega_v = N \Delta v = \frac{1}{\Delta Z}$$

整个频率范围

频率域样本间的间隔与空间样本间的间距和样本数成反比。

Low Resolution



FOV相同

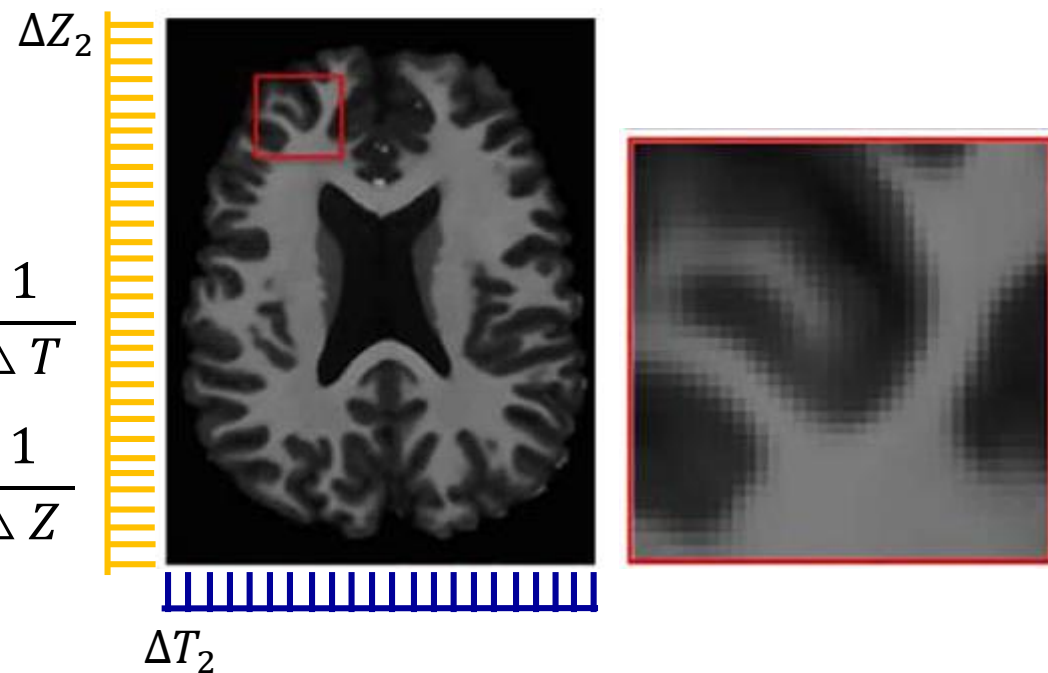
$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta T}$$

$$\Delta v = \frac{1}{N \Delta Z}$$

$$\Omega_u = M \Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$

$$\Omega_v = N \Delta v = \frac{1}{\Delta Z}$$

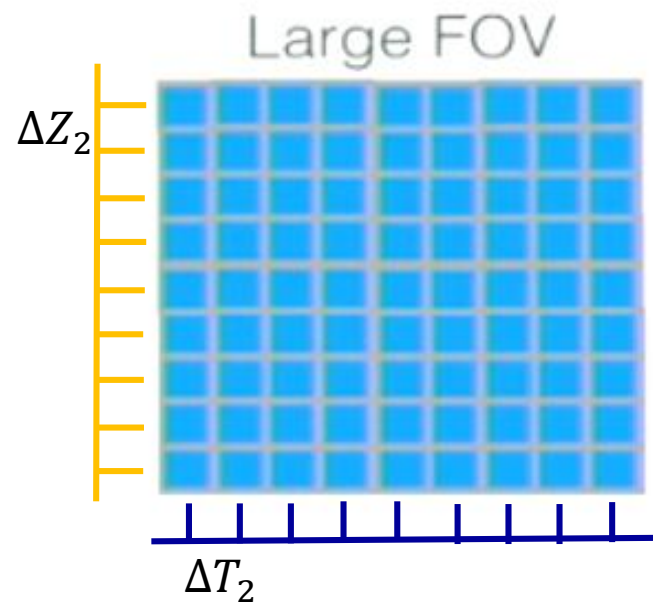
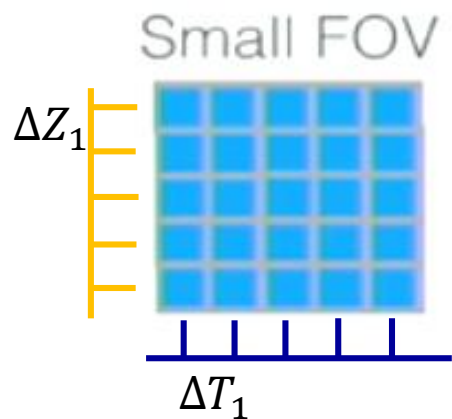
High Resolution



More
k-space
coverage

空间上的分辨率与频域的频谱覆盖范围相关

Bigger FOV = More pixels



$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta T}$$

$$\Delta v = \frac{1}{N \Delta Z}$$

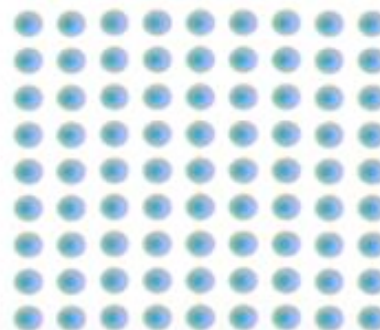
$$\Omega_u = M \Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$

$$\Omega_v = N \Delta v = \frac{1}{\Delta Z}$$

More pixels = more measurements = denser k-space sampling



k-space



§4.6 二维离散傅立叶变换的性质

- 平移和旋转

$$f(x, y)e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi\left(\frac{x_0u}{M}+\frac{y_0v}{N}\right)}$$

$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\rho, \varphi + \theta_0)$ 若 $f(x, y)$ 旋转 θ_0 角度, 则 $F(u, v)$ 也旋转相同的角度。

- 平均值

$$F(0,0) = MN \cdot \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-j2\pi\left(\frac{0 \cdot x}{M}+\frac{0 \cdot y}{N}\right)} = MN \cdot \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN \cdot \bar{f}(x, y)$$

$|F(0, 0)|$ 是谱的最大分量

§4.6 二维离散傅立叶变换的性质

- 周期性

离散的二维傅里叶变换及其反变换在 u 方向和 v 方向是无限周期的

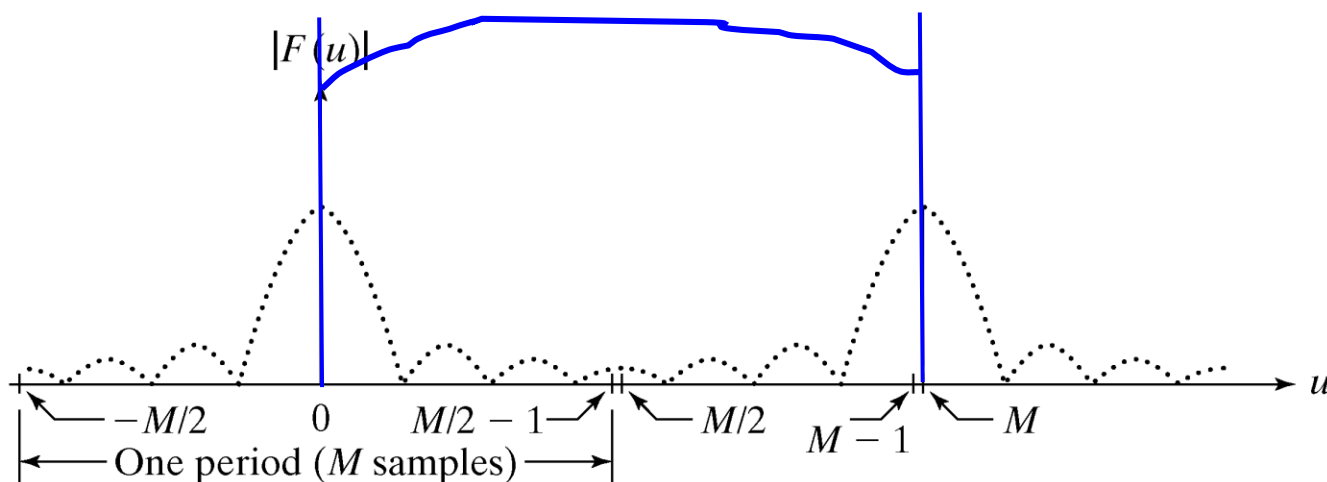
$$F(u, v) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$$

$$f(x, y) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$$

其中 k_1, k_2 是整数

周期性在基于DFT算法的实现上有着重要作用。

§4.6 二维离散傅立叶变换的性质



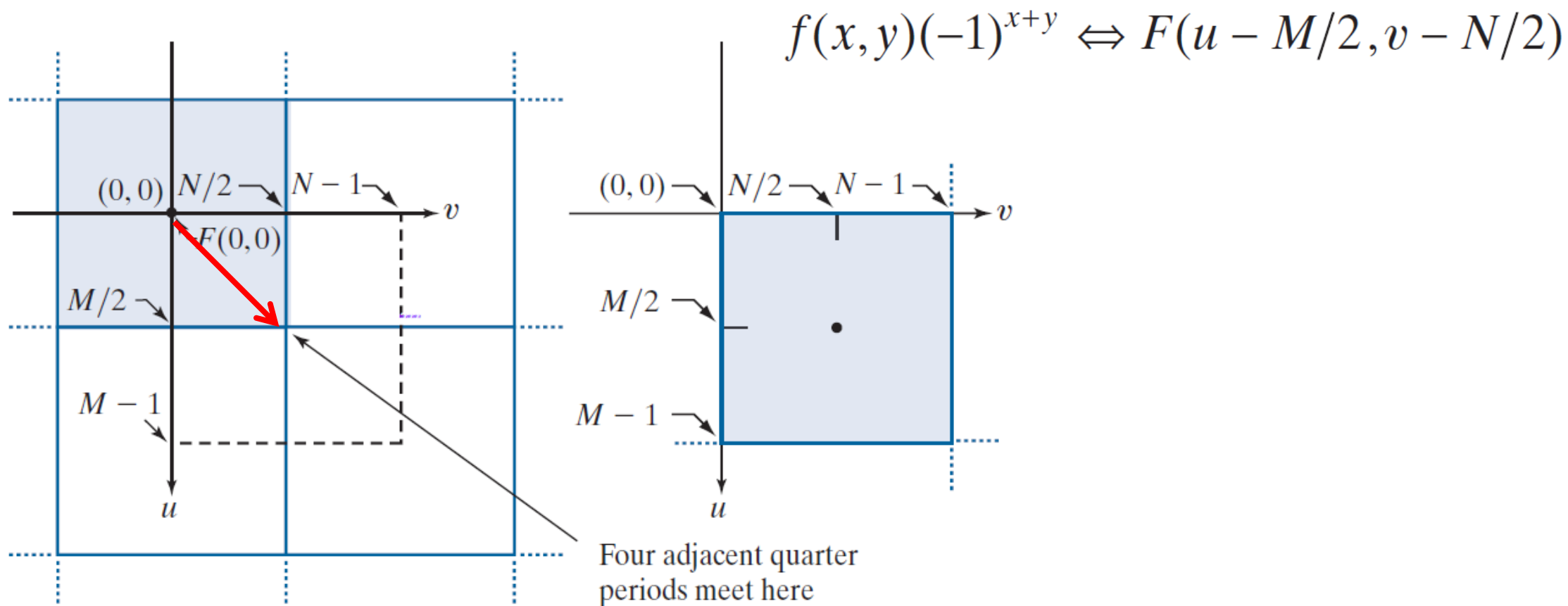
- 一维傅里叶变换产生的是两个紧邻的半周期
- 希望观察一个完整周期的傅里叶频谱

$$f(x)e^{j2\pi(u_0x/M)} \Leftrightarrow F(u - u_0)$$

$$f(x)(-1)^x \Leftrightarrow F(u - M/2)$$

□ $f(x)$ 变换前乘以 $(-1)^x$

§4.6 二维离散傅立叶变换的性质



- = $M \times N$ data array computed by the DFT with $f(x, y)$ as input
- = $M \times N$ data array computed by the DFT with $f(x, y)(-1)^{x+y}$ as input
- = Periods of the DFT

§4.6 二维离散傅立叶变换的性质

- 傅里叶谱和相角

极坐标下，二维DFT可表示为 $F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\varphi(u, v)}$

幅度，也称为傅里叶谱或频谱

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

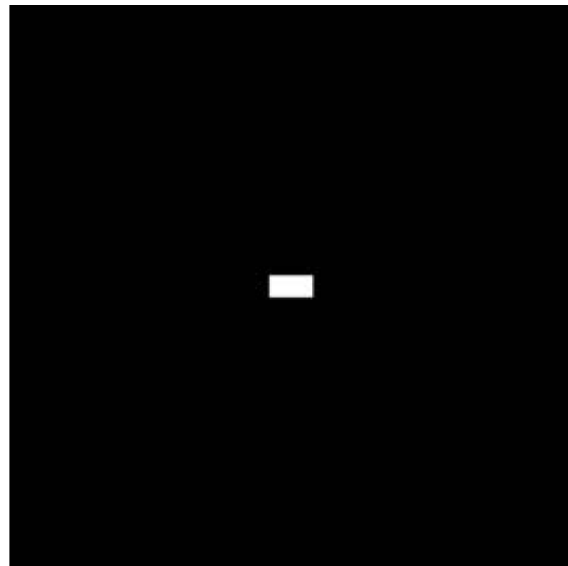
频谱，信息大小

相角

$$\varphi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

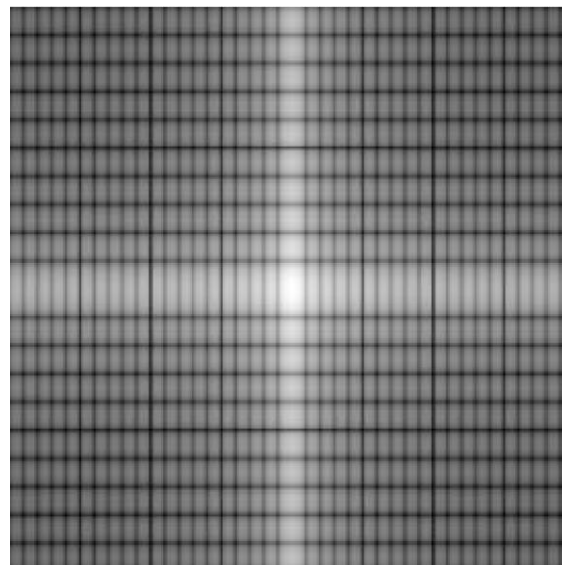
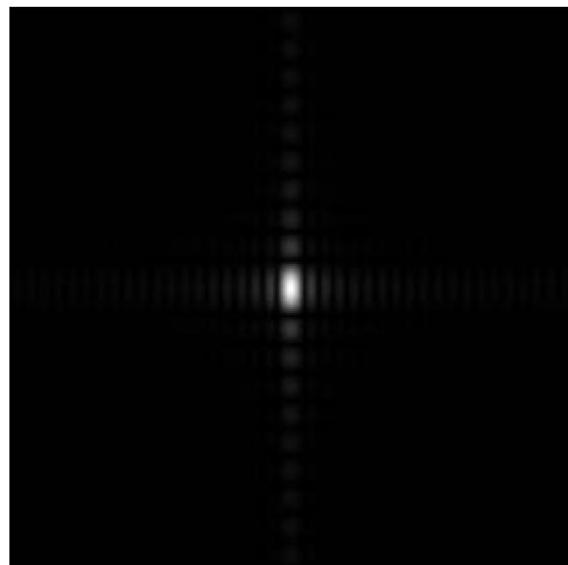
相角，定位信息

§4.6 二维离散傅立叶变换的性质



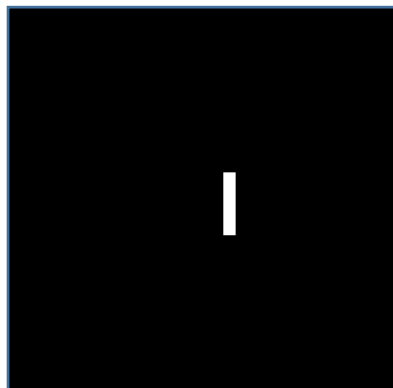
原点在左上角，所以变换的原点区域包含了最高值

周期性中心化该谱，变换前原图像乘以 $(-1)^{x+y}$

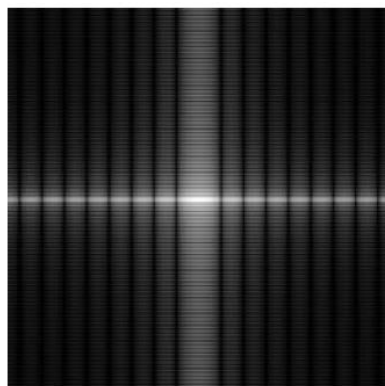


- $D(u, v) =$
- $\log(1 + |F(u, v)|)$

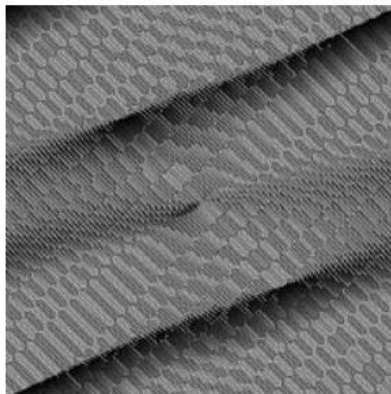
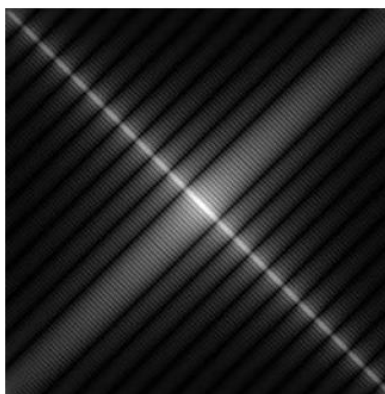
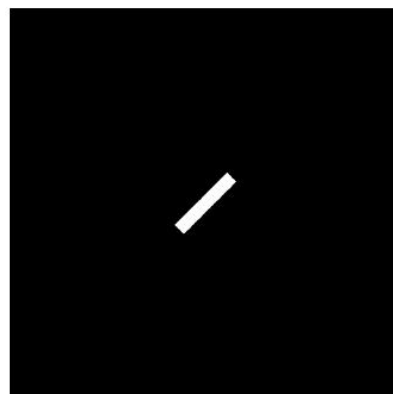
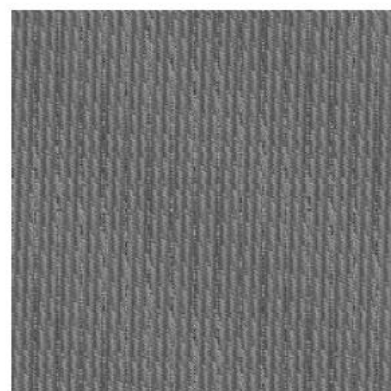
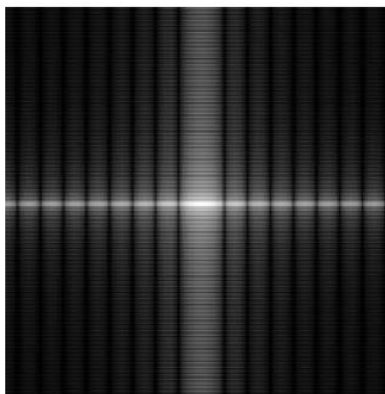
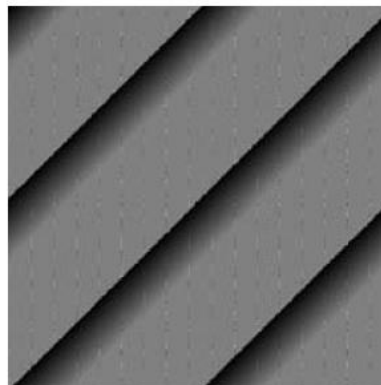
图像



谱图



相角图



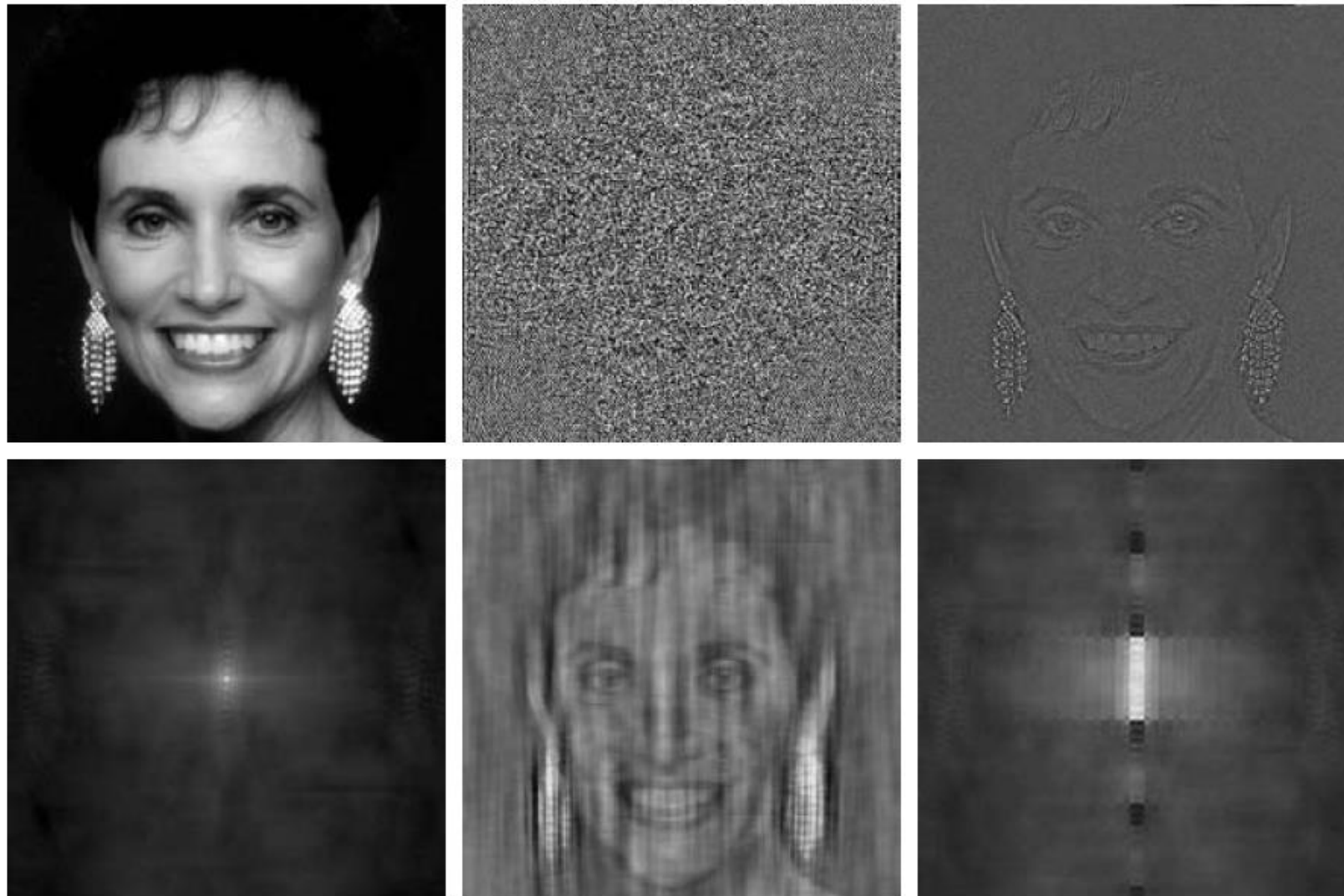
$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)}$$

谱对图像平移不敏感（指数项的绝对值是1），随旋转图像以相同的角度旋转。

§4.6 二维离散傅立叶变换的性质

$$|F(u, v)| = 1$$

灰度信息丢失



相位角=0