

频率域滤波

- 4.1 背景
- 4.2 基本概念
- 4.3 取样和取样函数的傅立叶变换
- 4.4 单变量的离散傅立叶变换
- 4.5 两个变量的扩展
- 4.6 二维离散傅立叶变换的一些性质
- 4.7 频率域滤波基础
- 4.8 频率域滤波器平滑图像
- 4.9 频率域滤波器锐化图像
- 4.10 选择性滤波

§4.8 频域平滑滤波器

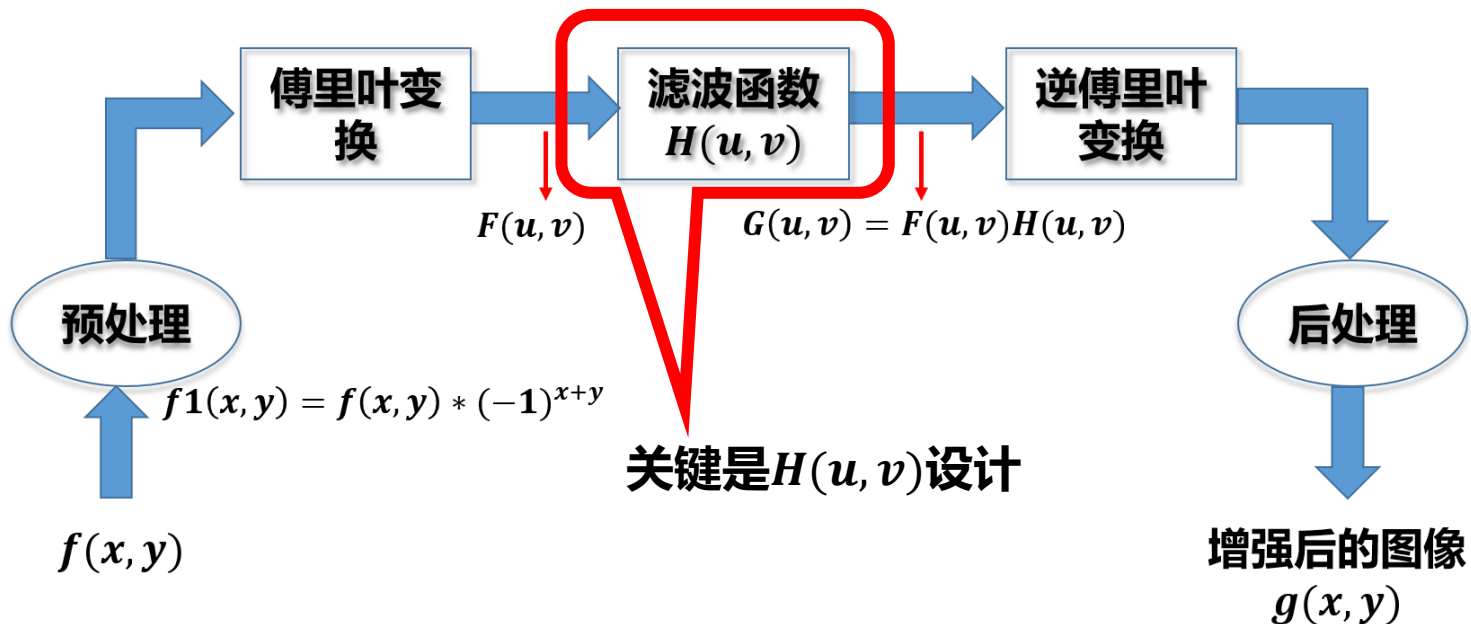
基本思想 图像的边缘和其它灰度变化剧烈的部分对应着频域的高频成分，所以可以通过减弱高频成分就可以实现图像的平滑(模糊)

基本手段 频域中低通滤波 (频域相乘)

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

平滑的图像

$$= \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$



§4.8 频域平滑滤波器

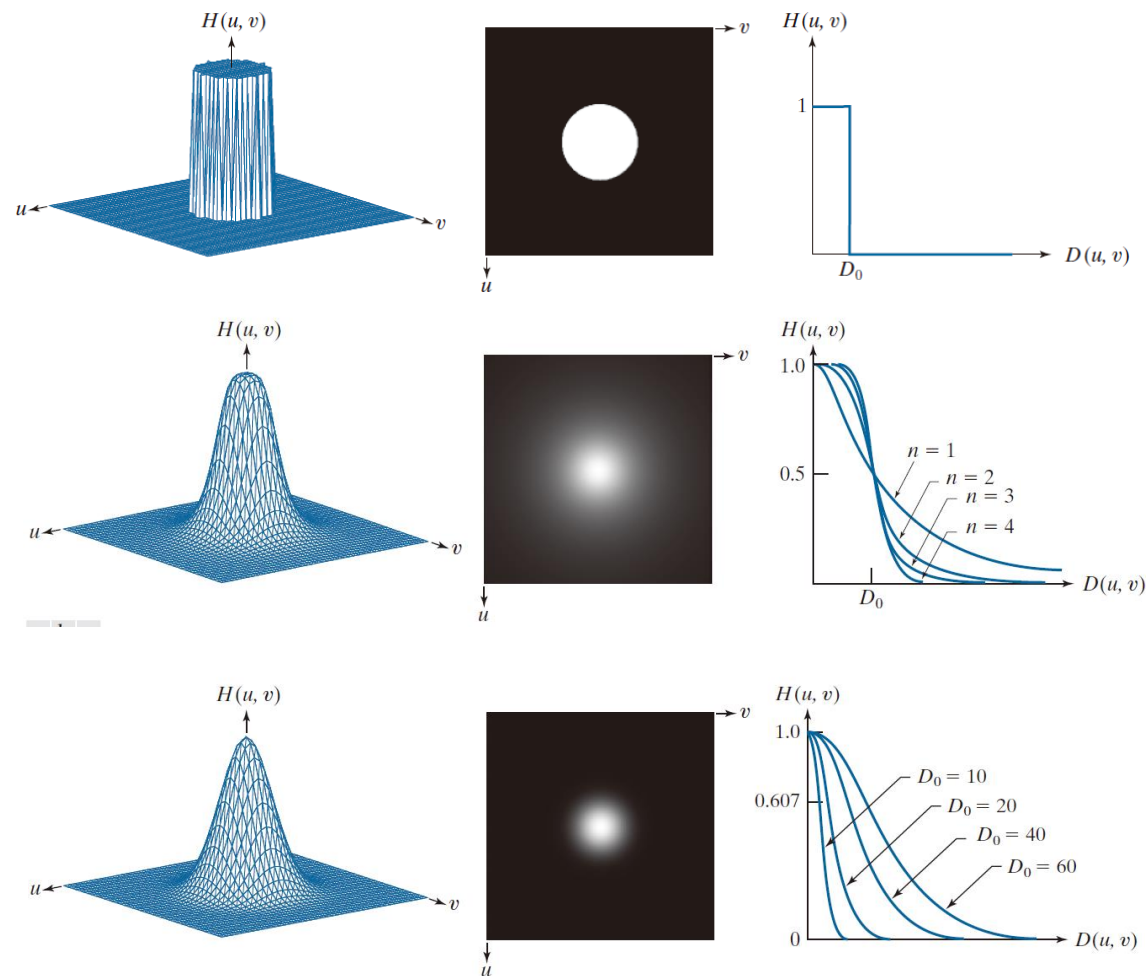
■ 频域低通滤波器 $H(u, v)$ 的设计方法

低通滤波器

理想低通滤波器
(Idea)

巴特沃斯滤波器
(Butterworth)

高斯滤波器
(Gaussian)

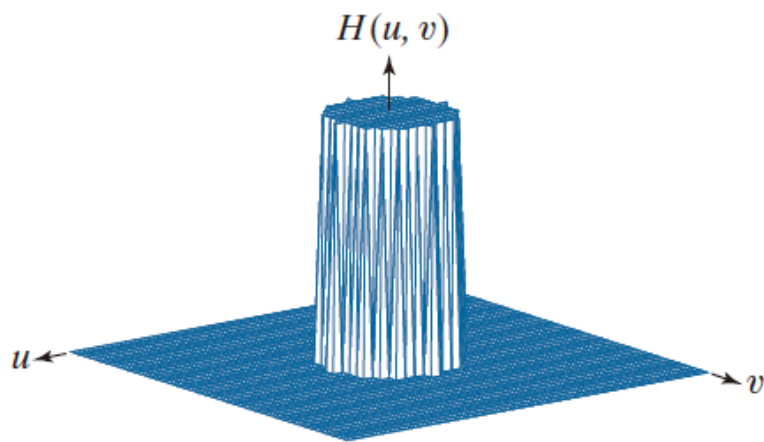


§4.8.1 理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)

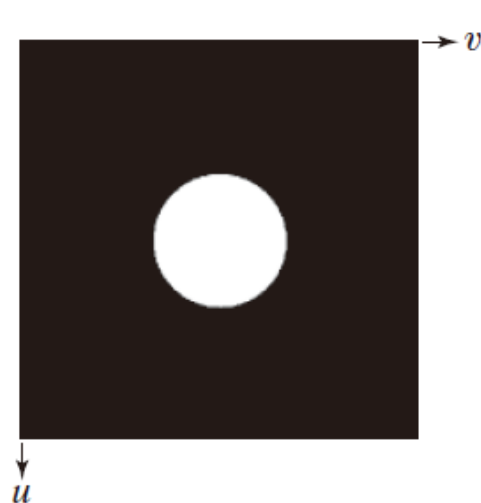
■ 理想低通滤波器传递函数

方法:从高频处截断,只保留低频部分

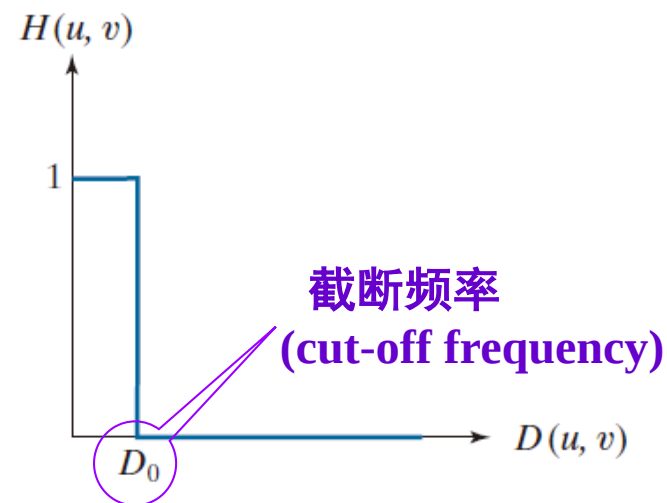
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$



$H(u, v)$ 的三维显示



$H(u, v)$ 的幅频谱图



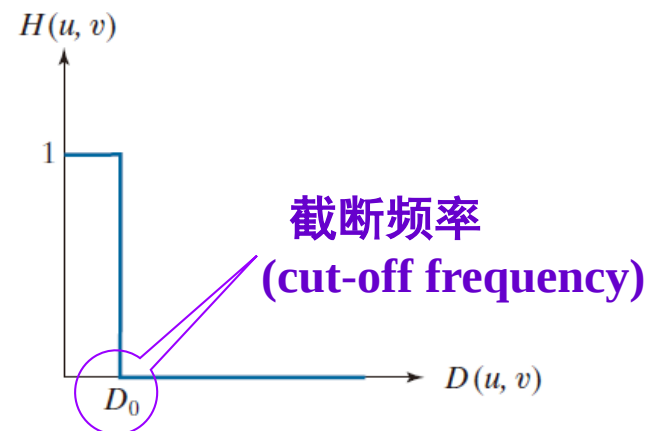
$D(u, v)$ 是 (u, v) 到原点 $(0, 0)$ 的距离

§4.8.1 理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)



如何选择截止频率 D_0 ?

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



用能量比 α 选择截止频率 D_0 (丢弃高频能量)

低频能量所占比重: $\alpha = \frac{\text{图像区域能量}}{\text{图像所有能量}} = \frac{\sum_{r=0}^{D_0} \sum_{\theta=0}^{2\pi} |F(r, \theta)|^2}{\sum_{r=0}^{D_{\max}} \sum_{\theta=0}^{2\pi} |F(r, \theta)|^2} \times 100$

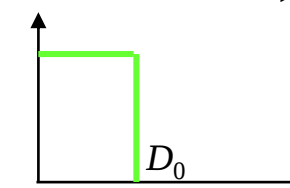
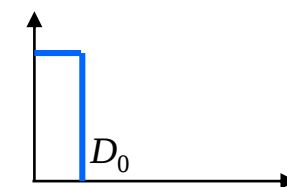
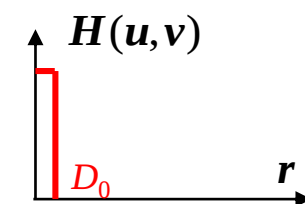
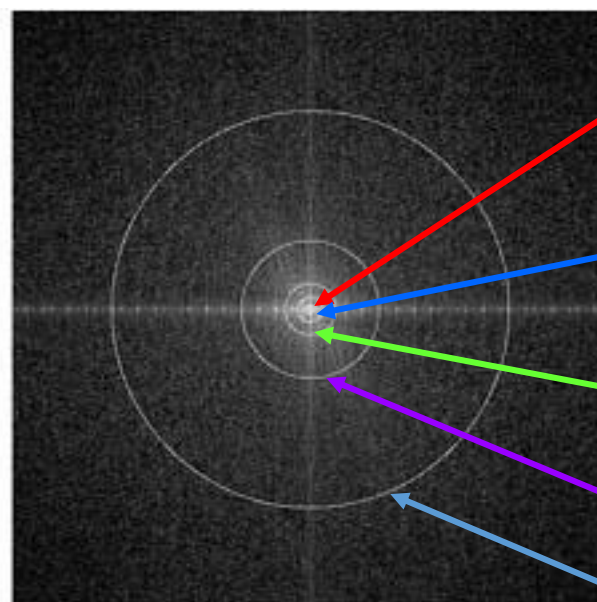
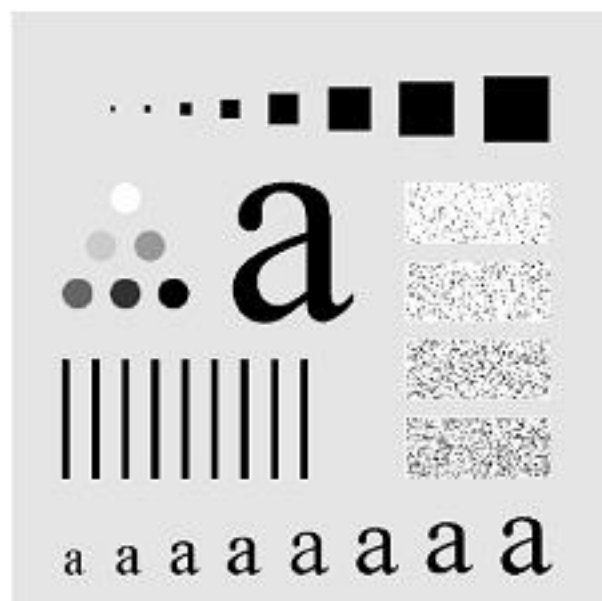
例如选取 $\alpha=95\%$

高频能量: $1 - \alpha$

§4.8.1 理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)

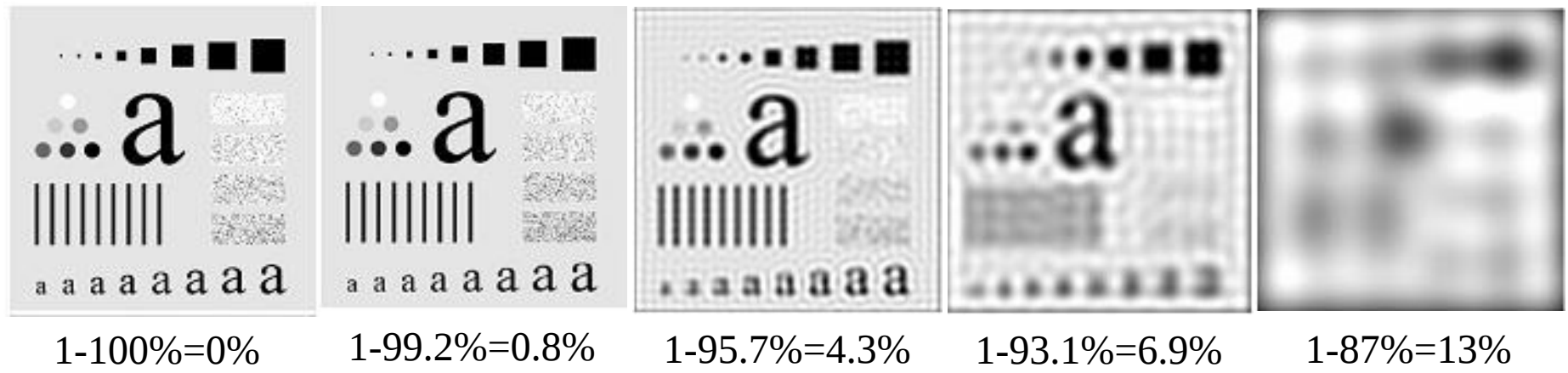
➤ 举例: 选取截止频率 D_0 丢弃高频能量

$$\alpha = \frac{\text{图像区域能量}}{\text{图像所有能量}} = \frac{\sum_{r=0}^{D_0} \sum_{\theta=0}^{2\pi} |F(r, \theta)|^2}{\sum_{r=0}^{D_{\max}} \sum_{\theta=0}^{2\pi} |F(r, \theta)|^2} \times 100$$

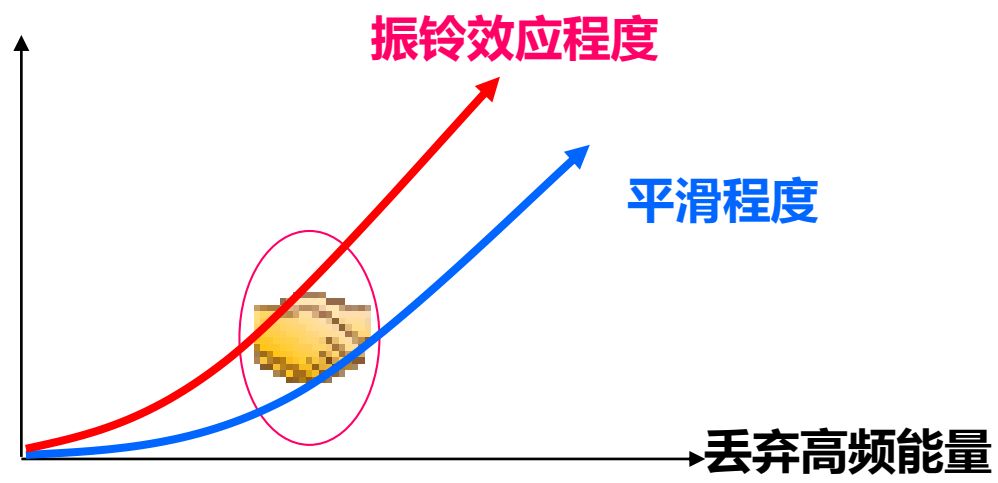


§4.8.1理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)

➤ 举例:选取截止频率 D_0 丢弃高频能量



平滑程度和振铃(环)效应的矛盾



§4.8.1 理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)

理想低通滤波器特点

- D_0 半径内的频率分量无损通过
- 圆外的频率分量被滤除
- 若滤除的高频分量有大量的边缘信息，会导致图像边缘模糊
- 在 D_0 半径包含的范围内包含大部分能量，大部分尖锐细节信息存在于被去除的能量中
- 被平滑的图像导致一种非常严重的**振铃效果**

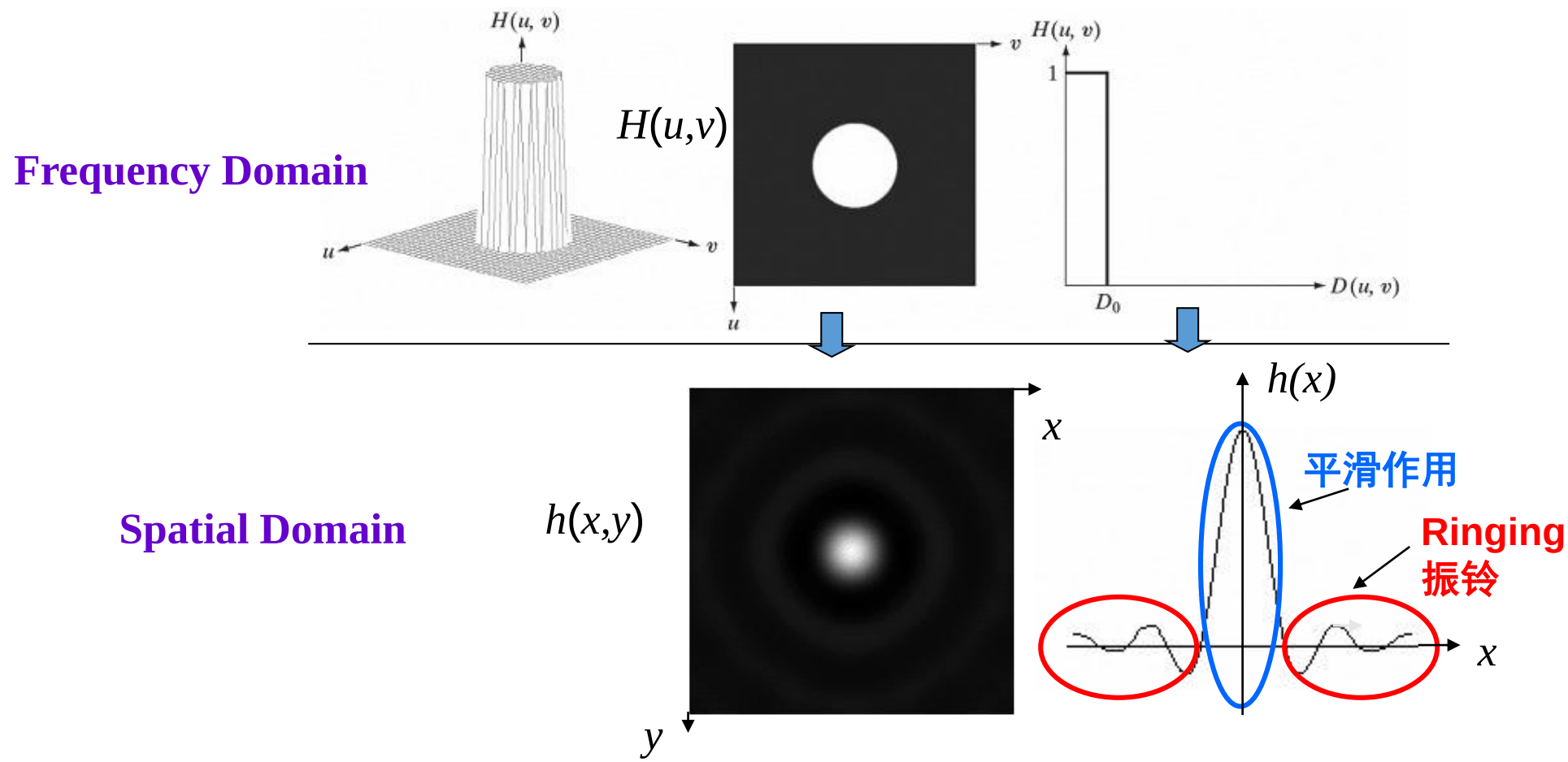
§4.8.1 理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)



为什么有振铃效应?



观察 $H(u,v)$ 的空域形式(PSF)可找到直观解释



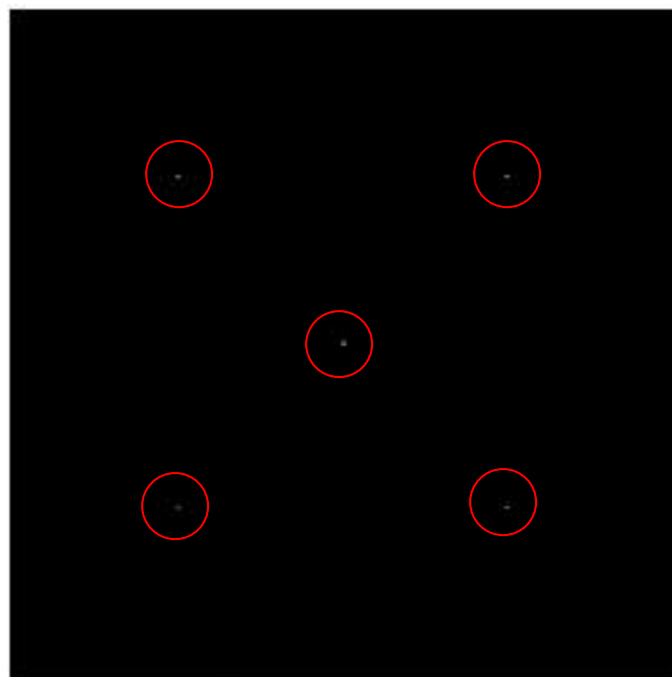
§4.8.1 理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)



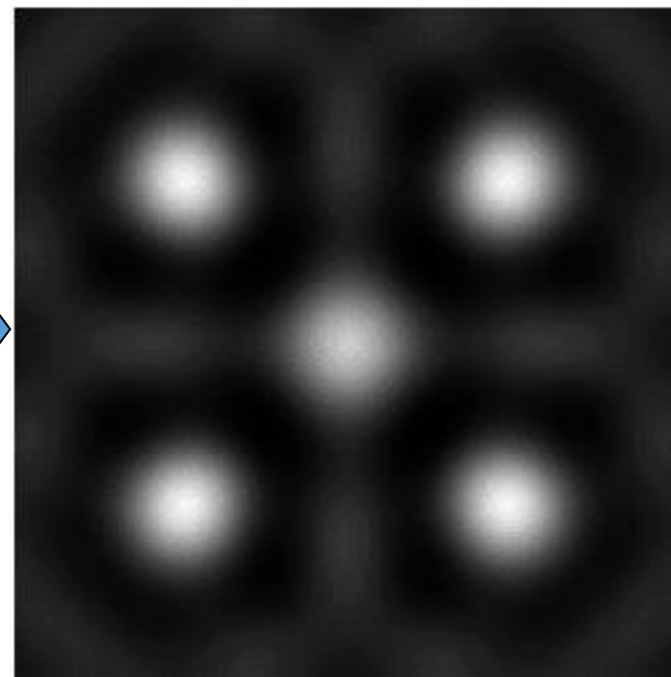
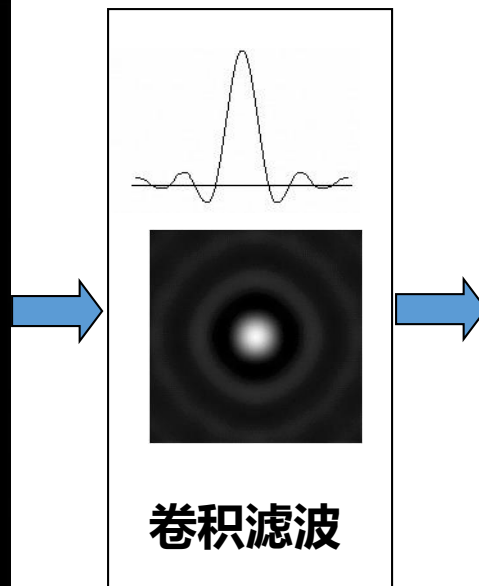
为什么有振铃效应?



观察 $H(u,v)$ 的空域形式(PSF)可找到直观解释



原始图像(黑色背景上有5个脉冲)



滤波图像

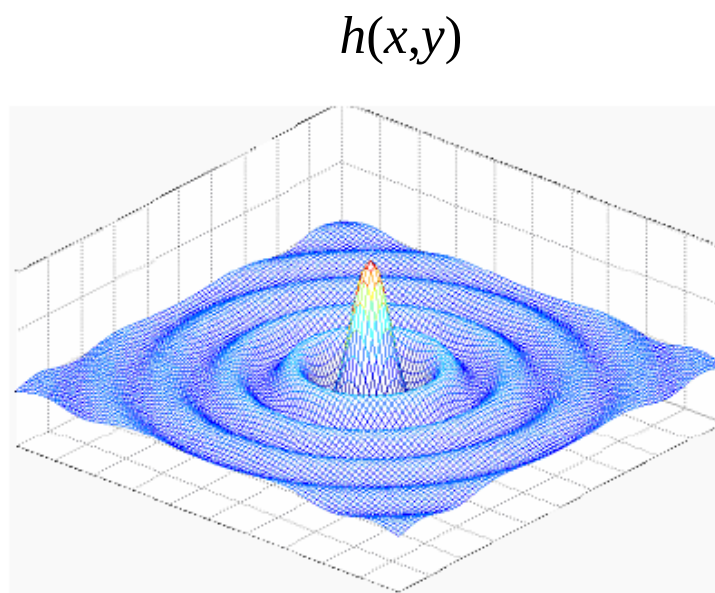
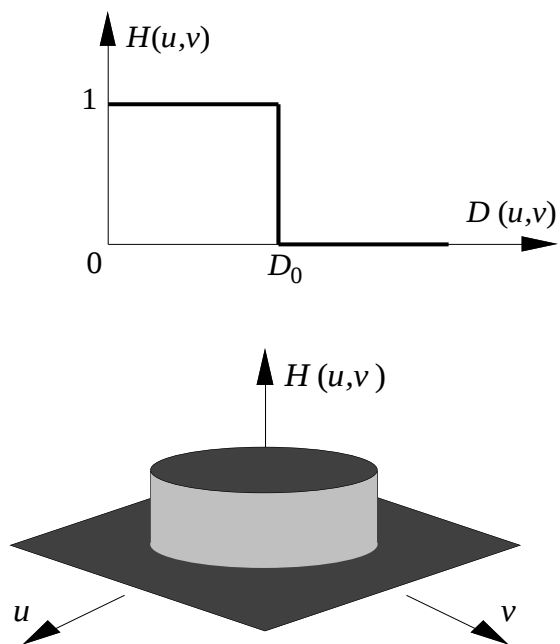
§4.8.1 理想低通滤波器 (Ideal Lowpass Filters)



为什么有振铃效应?



观察 $H(u,v)$ 的空域形式(PSF)可找到直观解释



$h(x,y)$ 的显示是一系列的同心圆环。圆环的半径反比于 D_0 。

□ D_0 较小: $h(x,y)$ 为数量较少但较宽的同心圆环。

- 使 $g(x,y)$ 模糊的比较厉害, 振铃现象明显;

□ D_0 较大: $h(x,y)$ 为数量较多但较窄的同心圆环。

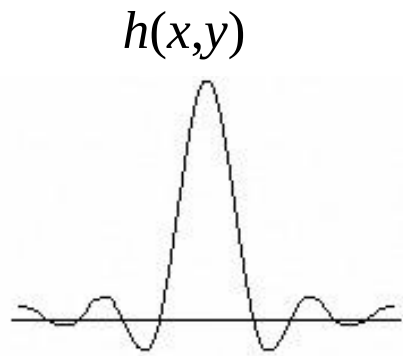
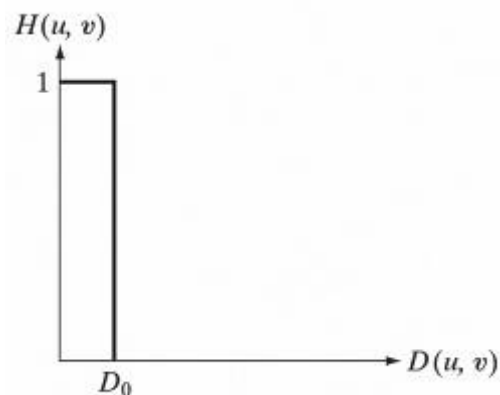
- 使 $g(x,y)$ 模糊的比较少

§4.8.2 低通滤波器



怎样才能平滑的同时又没有振铃效应呢？

基本思想：使理想低通滤波器的频域下降沿变得光滑,从而使得空域滤波器(点扩展函数)的旁瓣变小,使得振铃效应减弱或消失



巴特沃斯低通滤波器
(Butterworth)

高斯低通滤波器
(Gaussian)

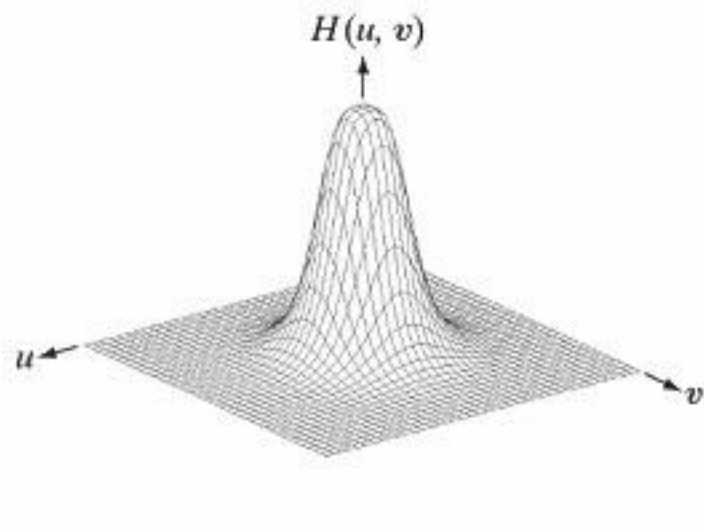
§4.8.2 巴特沃斯低通滤波器(Butterworth Lowpass Filters)

■ 频域传递函数

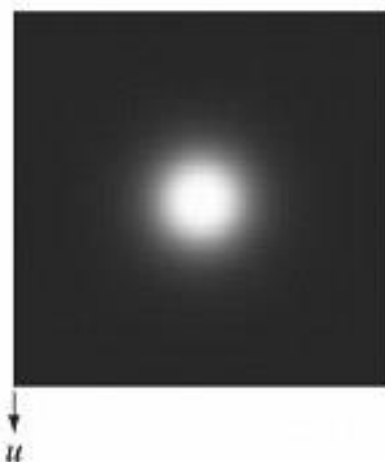
$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

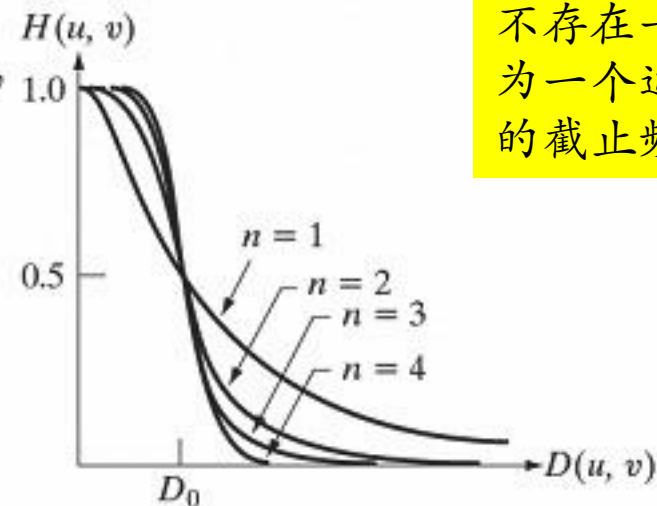
- ① 低通:距离中心越远, H 值越小;
- ② 光滑下降沿



三维形式($n=1$)



图像形式($n=1$)



剖面

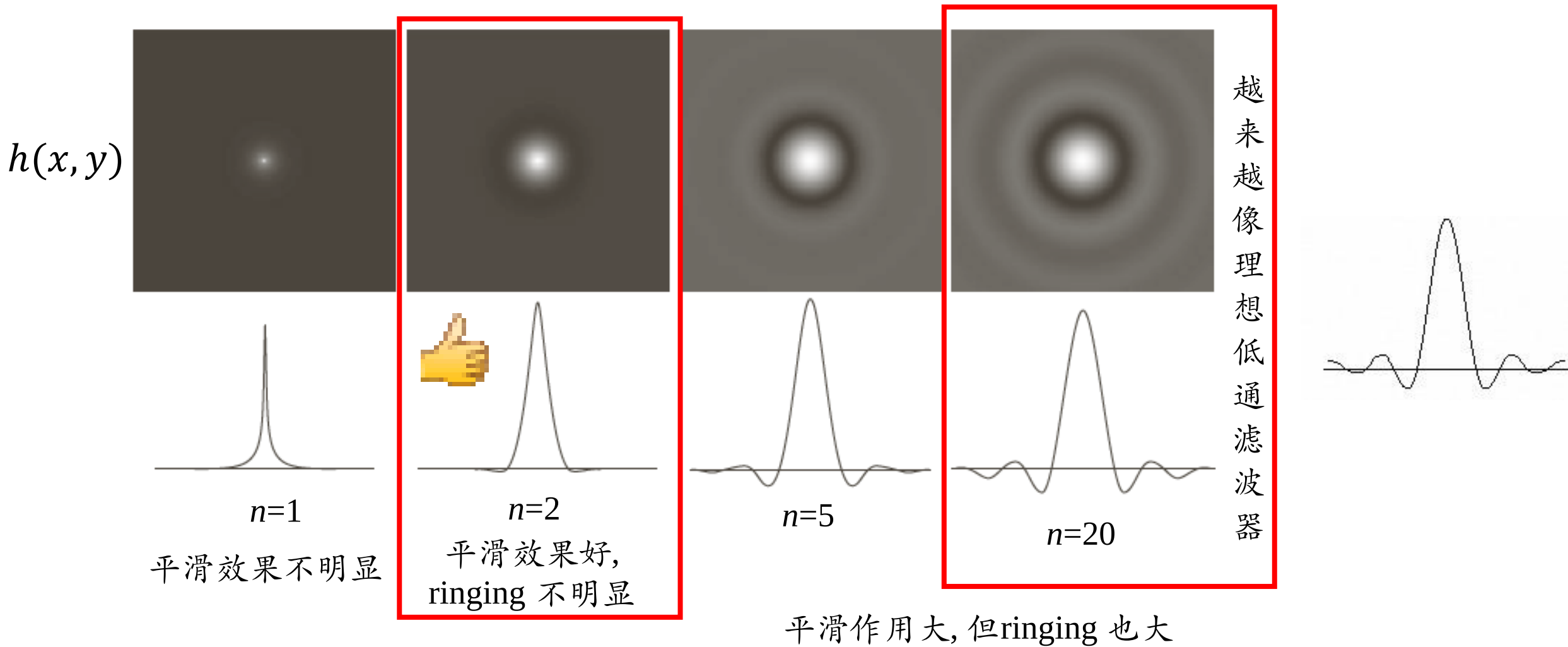
不存在一个不连续点作为一个通过和被滤波掉的截止频率的明显划分

n 愈大, 下降边沿愈陡峭

§4.8.2 巴特沃斯低通滤波器(Butterworth Lowpass Filters)

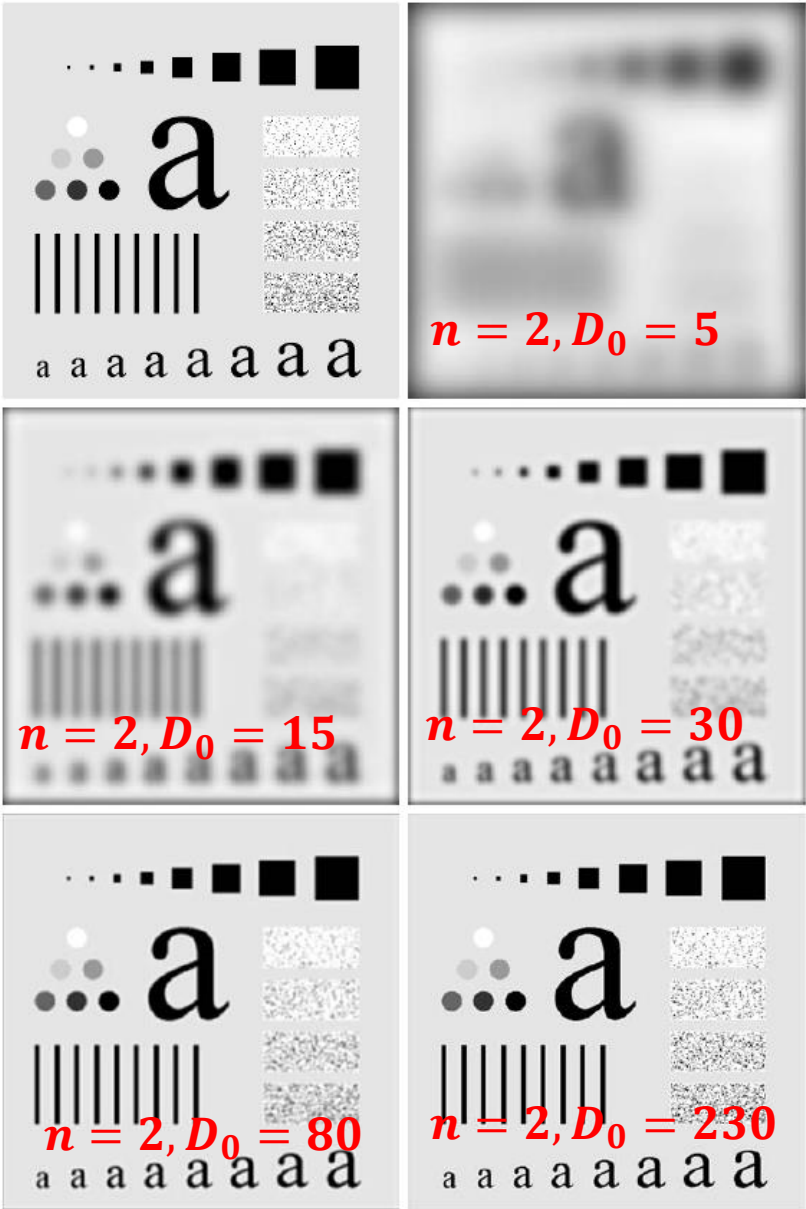
■ 空域点扩展函数(图例)

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

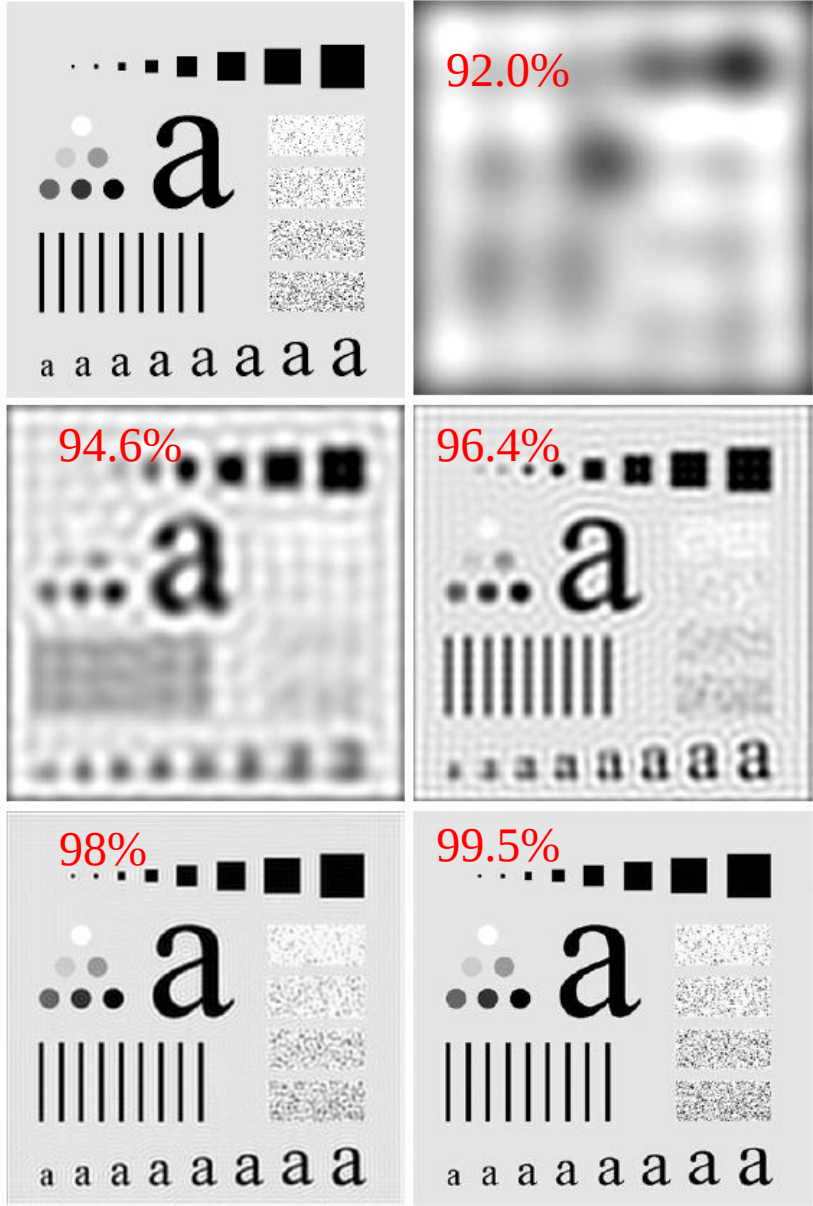


§4.8.2 巴特沃斯低通滤波器(Butterworth Lowpass Filters)

巴特沃斯低通滤波结果



理想低通滤波结果



平滑和振铃之间难以取得平衡

§4.8.3 高斯低通滤波器 (Gaussian Lowpass Filters)

- 巴特沃斯滤波器理论上仍存在些许振铃效应



是否存在没有(一点也没有)振铃效应的低通滤波器?



高斯(Gaussian)低通滤波器

神奇的高斯函数:

- ✓ 自然界中很多事件均服从高斯分布.(身高,成绩,噪声)
- ✓ 高斯函数的导数还是高斯函数
- ✓ 高斯函数的傅立叶变换还是高斯函数
- ✓ 高斯函数的反傅立叶变换还是高斯函数

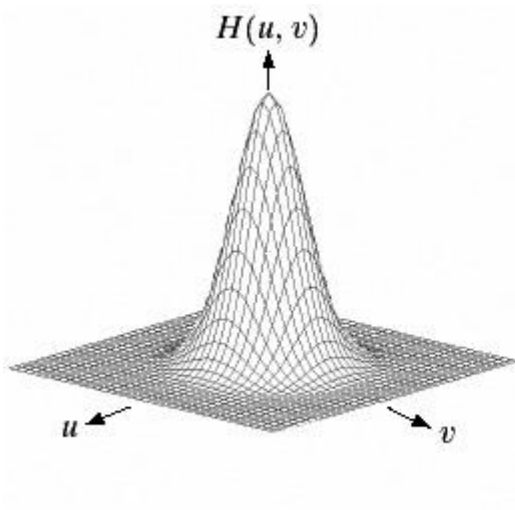
§4.8.3 高斯低通滤波器 (Gaussian Lowpass Filters)

■ Transfer function

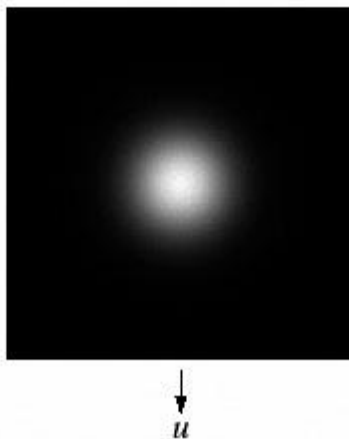
$$H(u, v) = e^{\frac{-D^2(u, v)}{2\sigma^2}} \quad (\sigma = D_0) \quad = e^{\frac{-D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

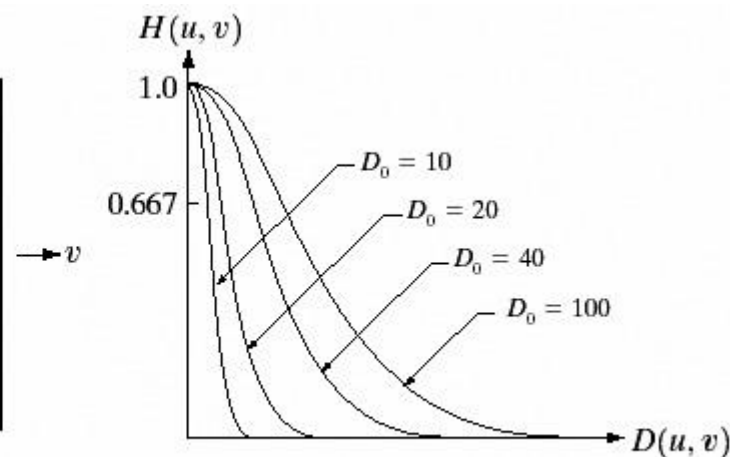
The inverse Fourier transform is Gaussian also. So Gaussian filters can avoid ringing



三维形式(n=1)



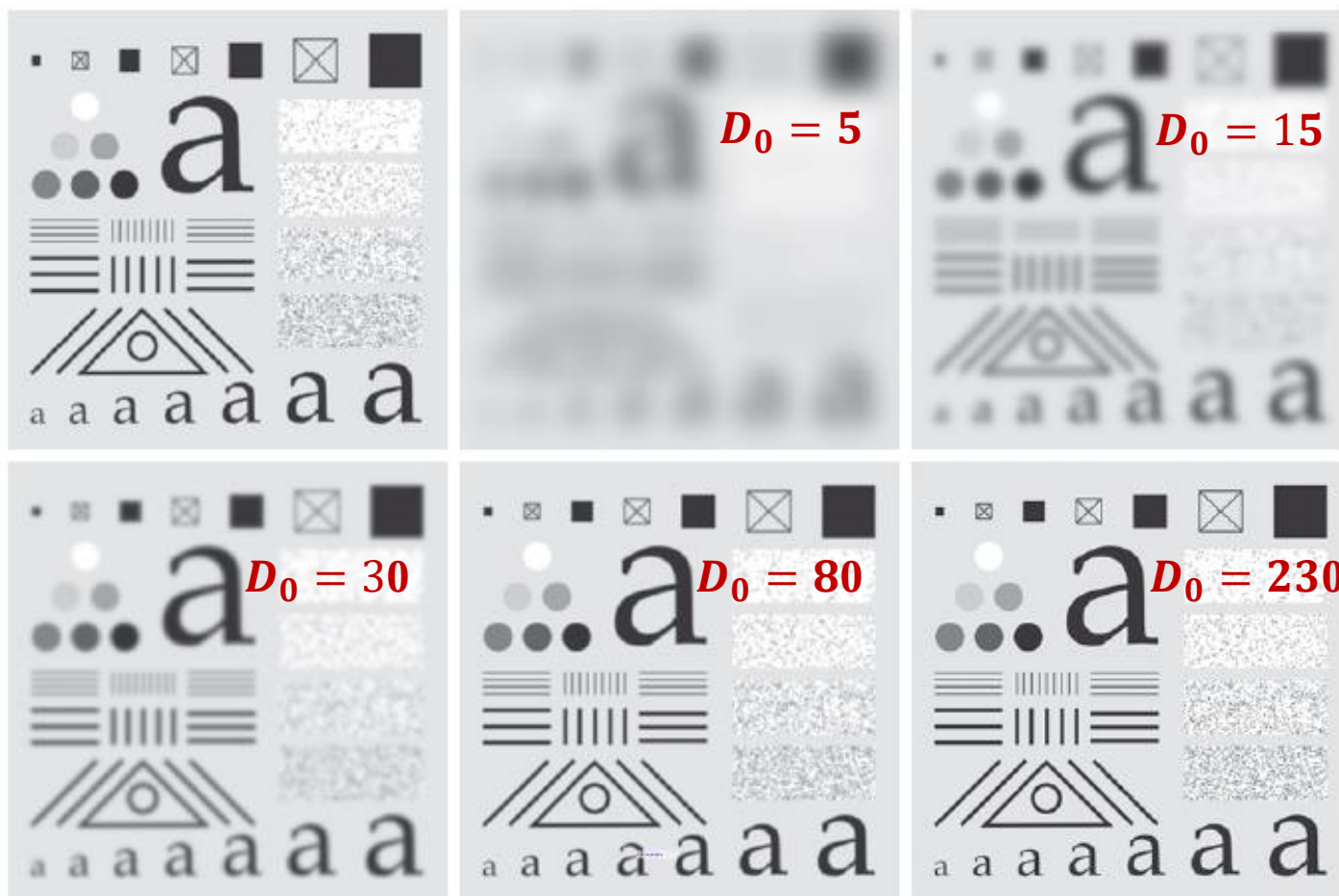
图像形式(n=1)



剖面

§4.8.3 高斯低通滤波器 (Gaussian Lowpass Filters)

■ Example 1: Gaussian lowpass filtering



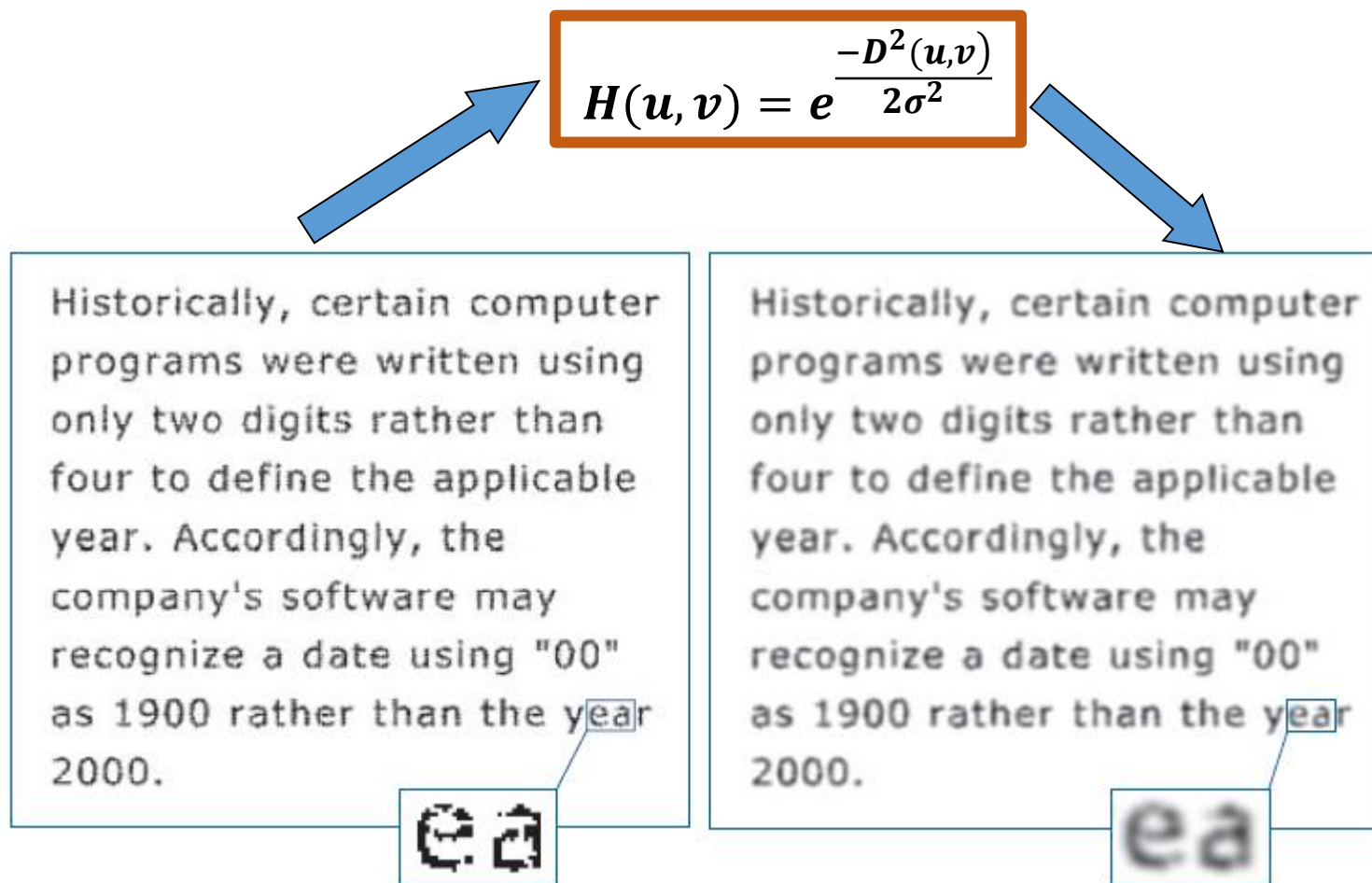
$$H(u,v) = e^{\frac{-D^2(u,v)}{2\sigma^2}}$$

No ringing at all

The filtered image can have no negative values

§4.8.3 高斯低通滤波器 (Gaussian Lowpass Filters)

■ Example 2: Gaussian lowpass filtering



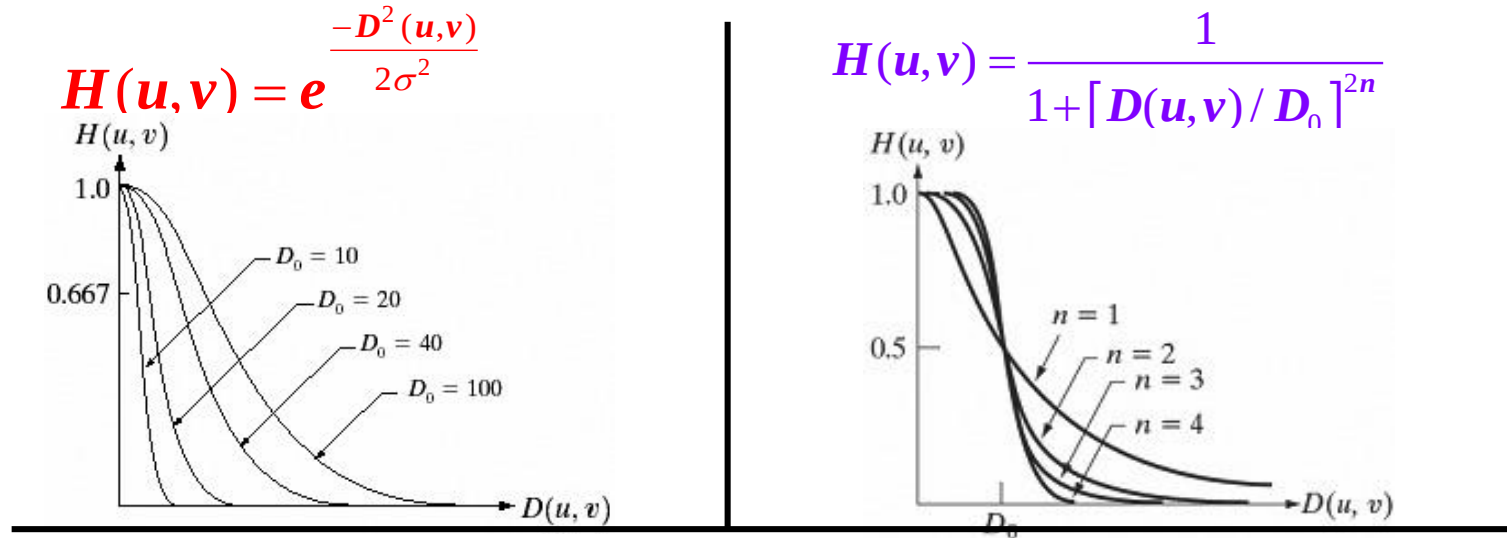
§4.8.3 高斯低通滤波器 (Gaussian Lowpass Filters)

■ Example 3: Gaussian lowpass filtering



FIGURE 4.50 (a) Original image (784×732 pixels). (b) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering using a GLPF with $D_0 = 80$. Note the reduction in fine skin lines in the magnified sections in (b) and (c).

➤ Gaussian lowpass vs. Butterworth lowpass



- ① Gaussian can completely eliminate ringing while Butterworth cannot.
 - ② At the cutoff frequency, Gaussian is not as sharp as Butterworth
-
- ① So prefer Butterworth to Gaussian when tight control of the transition between low and high frequencies about the cutoff frequency is needed
 - ② Prefer Gaussian to Butterworth when no ringing is allowed (e.g. in Medical diagnosis)