

频率域滤波

- 4.1 背景
- 4.2 基本概念
- 4.3 取样和取样函数的傅立叶变换
- 4.4 单变量的离散傅立叶变换
- 4.5 两个变量的扩展
- 4.6 二维离散傅立叶变换的一些性质
- 4.7 频率域滤波基础
- 4.8 频率域滤波器平滑图像
- 4.9 频率域滤波器锐化图像
- 4.10 选择性滤波

§4.9 频域锐化滤波器

基本思想

衰减图像的傅里叶变换的高频部分可以平滑图像

- 图像中的边缘及急剧变化部分与高频分量有关，当衰减图像中的低频分量时会相对地强调其高频分量，从而加强图像中边缘及急剧变化部分，达到图像锐化目的。

基本方法

高通滤波器 = 1 - 低通滤波器

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

§4.9 频域锐化滤波器

高通滤波器 = 1 - 低通滤波器

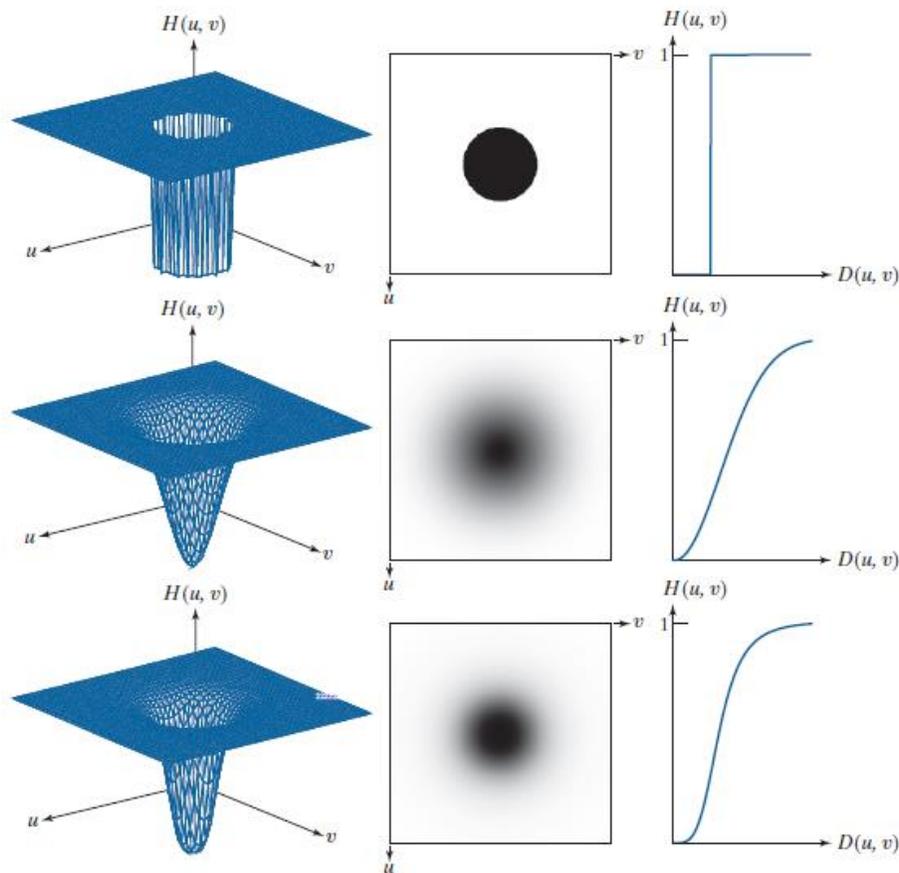
$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

高通滤波器

理想高通滤波器
(Idea)

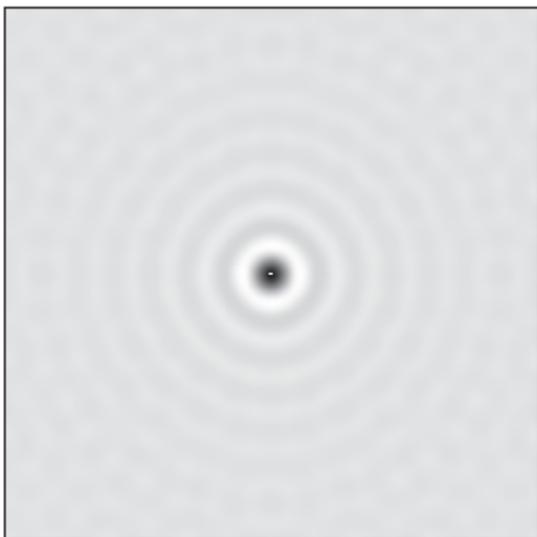
巴特沃斯高通滤波器
(Butterworth)

高斯高通滤波器
(Gaussian)

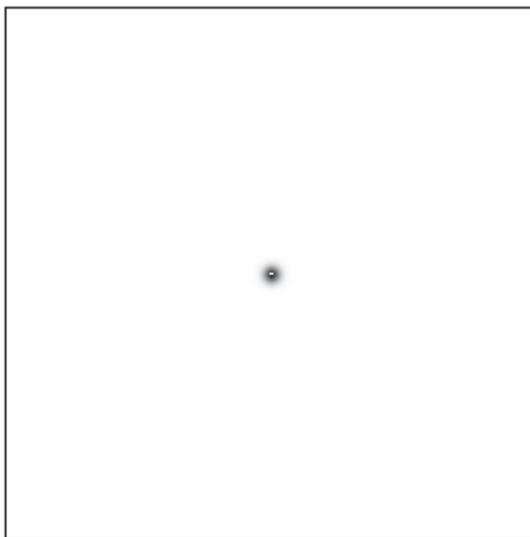


§4.9 频域锐化滤波器

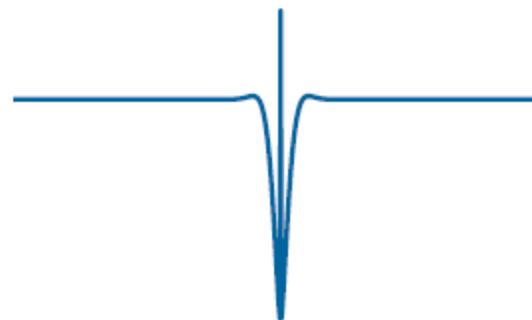
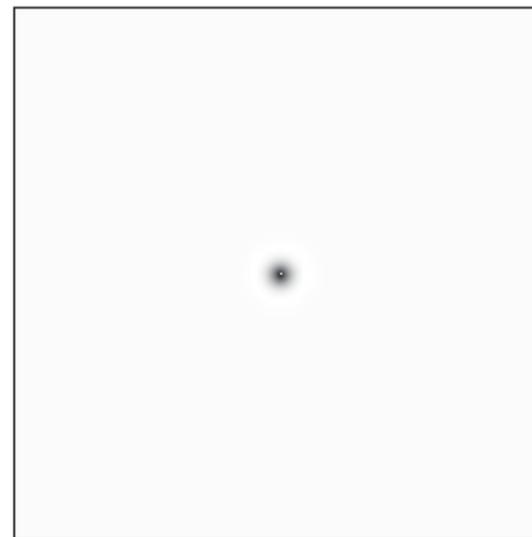
理想高通滤波器



巴特沃斯高通滤波器



高斯高通滤波器



空域表示形式

§4.9.1 理想高通滤波器IHPF

理想高通滤波器

理想高通滤波器 $H_{hp}(u, v)$ 可给出如下形式:

$$H_{hp}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

低通 lowpass

$$H_{lp}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

高通 highpass

$$H_{hp}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

IHPF同ILPF是相对的，IHPF通过将半径为 D_0 的圆内的所有频率置零，而毫无衰减地通过圆外的所有频率。

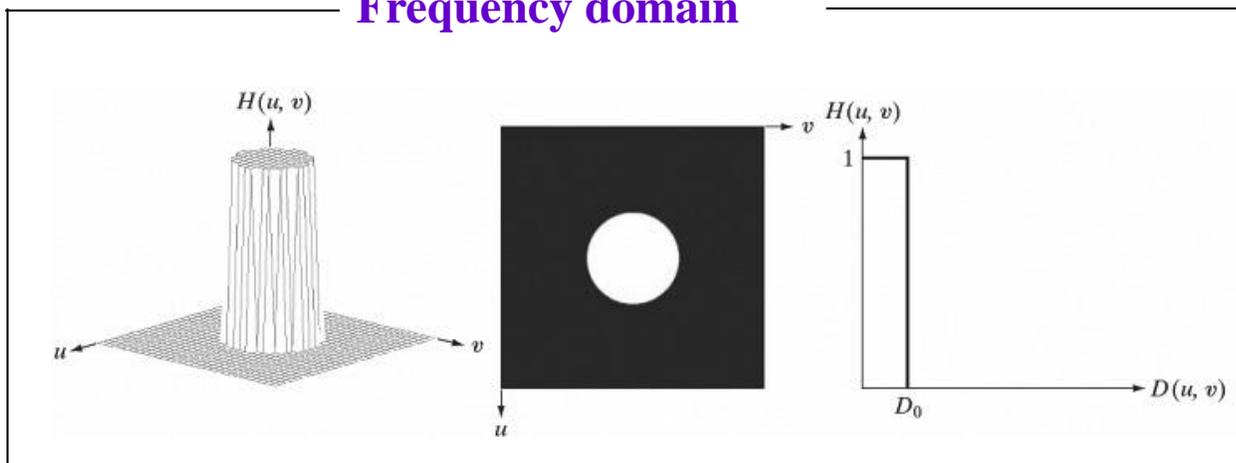
§4.9.1 理想高通滤波器IHPF

理想高通滤波器的不同表征形式

$$H_{hp}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

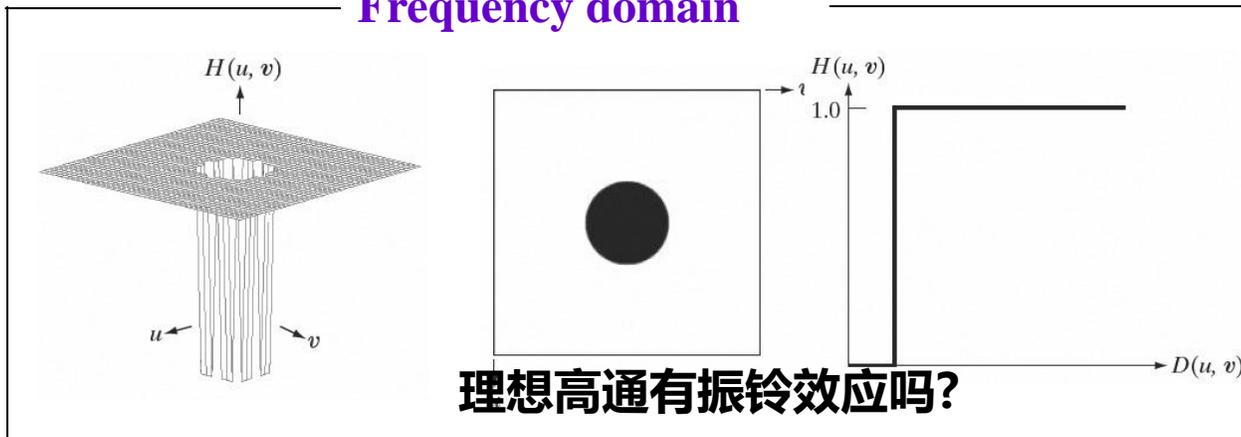
Frequency domain



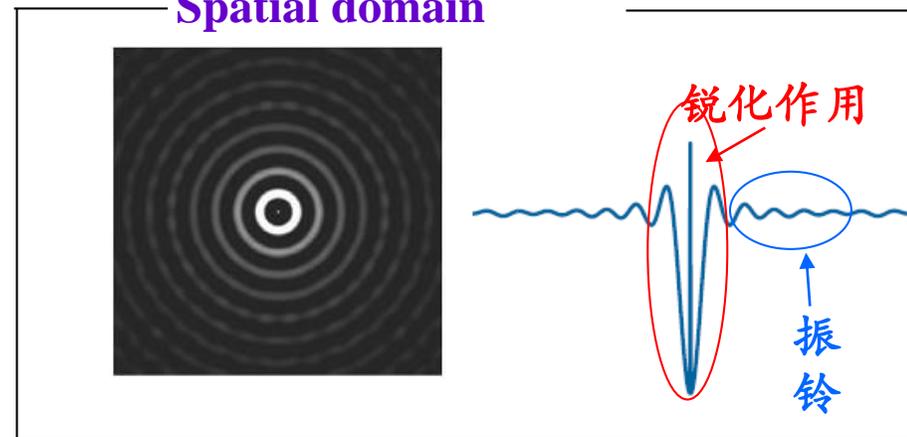
Spatial domain



Frequency domain

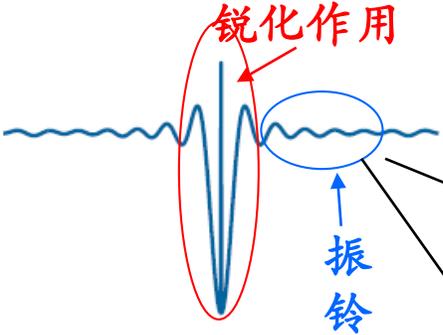


Spatial domain



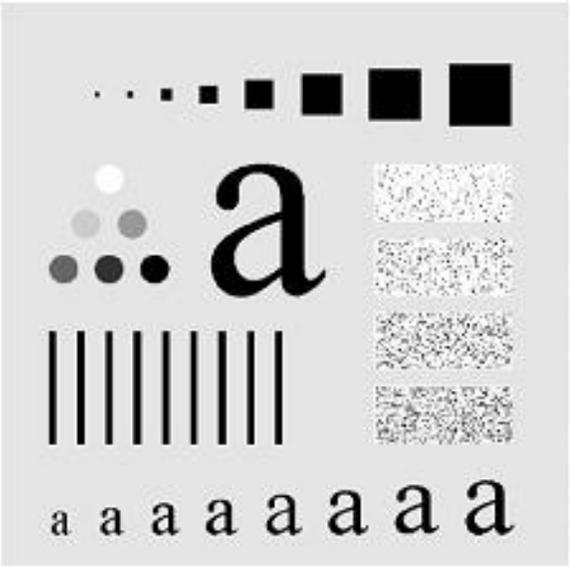
§4.9.1 理想高通滤波器IHPF

■ Example of ideal highpass filters

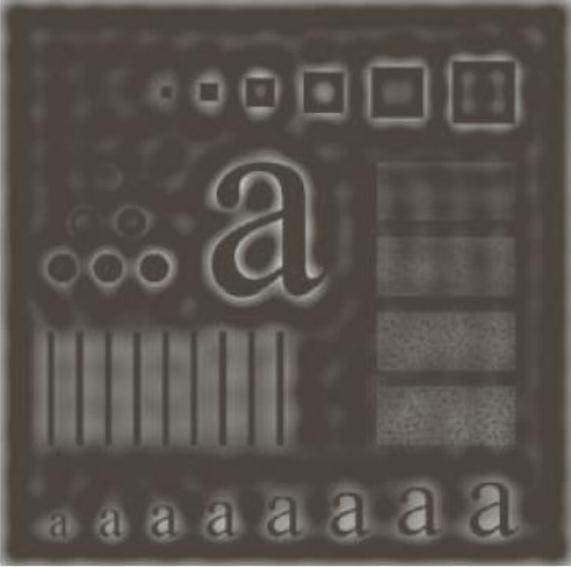


D_0 越小，振铃效果越明显

理想目标是：平坦区域全部变为黑色，变化部分变为白色



Input image



$D_0=30$



$D_0=60$



$D_0=160$

§4.9.2 巴特沃斯高通滤波器BHPF

■ Transfer function of Butterworth lowpass filters:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$



$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

■ Transfer function of Butterworth highpass

截止频率为 D_0 的 n 阶巴特沃斯高通滤波器(BHPF),其传递函数 $H(u, v)$ 为

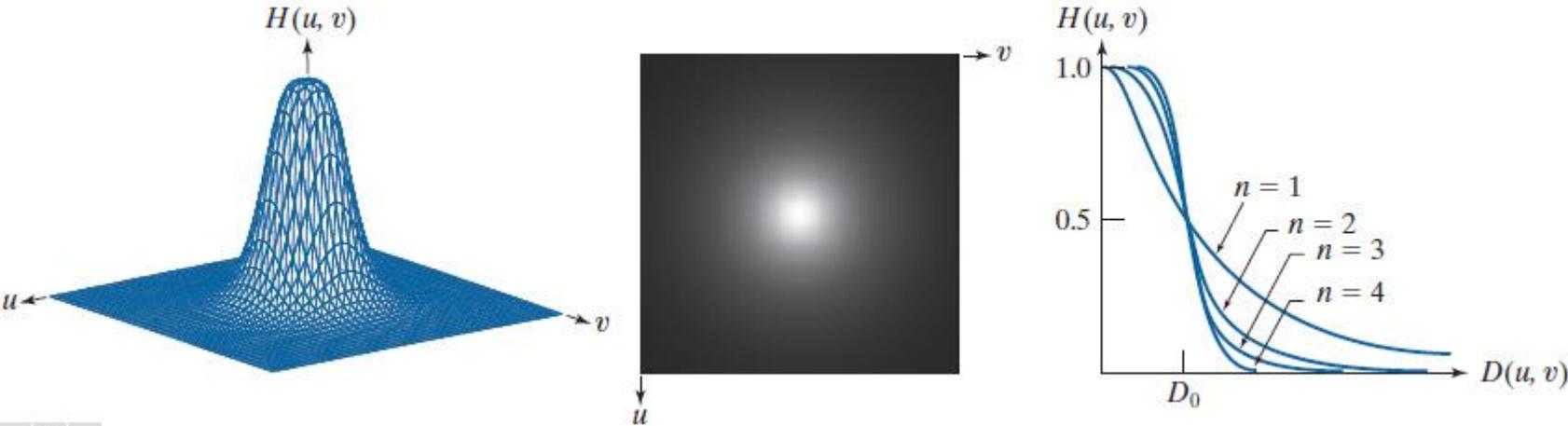
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

§4.9.2 巴特沃斯高通滤波器BHPF

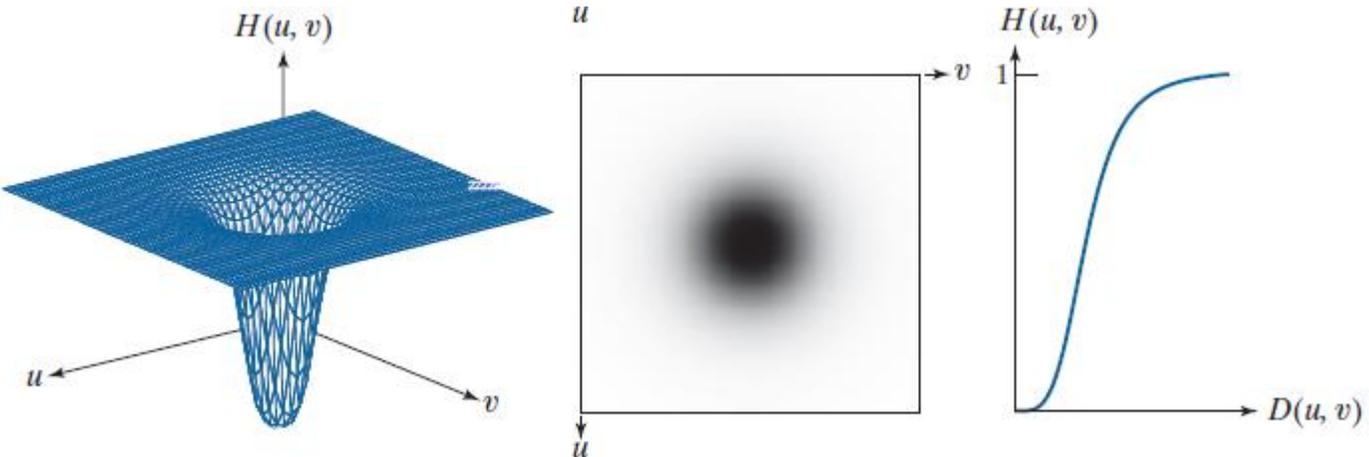
■ Illustration of butterworth highpass filters

低通
lowpass



$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

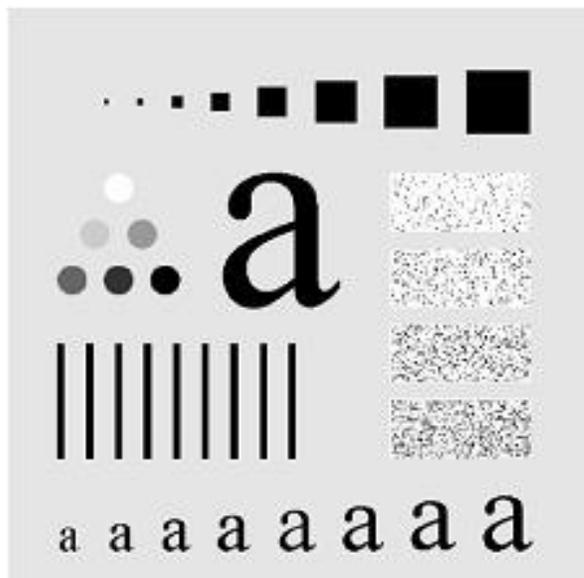
高通
highpass



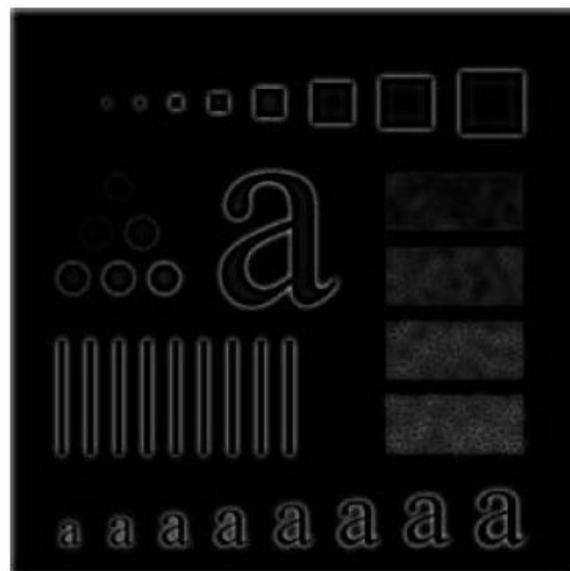
§4.9.2 巴特沃斯高通滤波器BHPF

■ Example of Butterworth highpass filtering

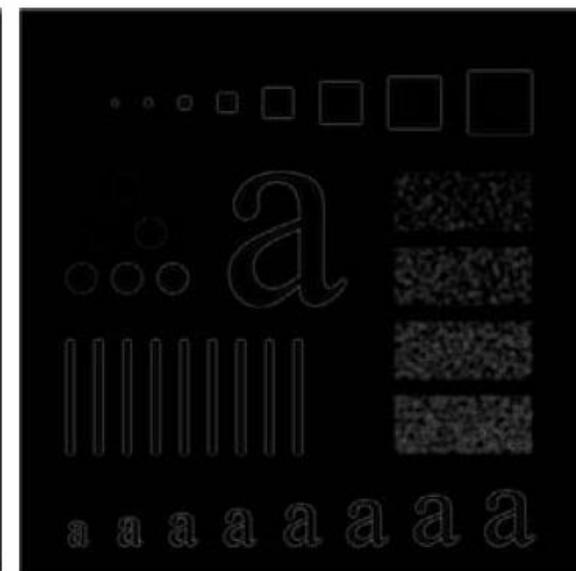
Ringling效应明显减少



$n = 2, D_0 = 30$



$n = 2, D_0 = 80$



$n = 2, D_0 = 160$

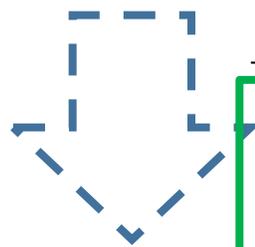
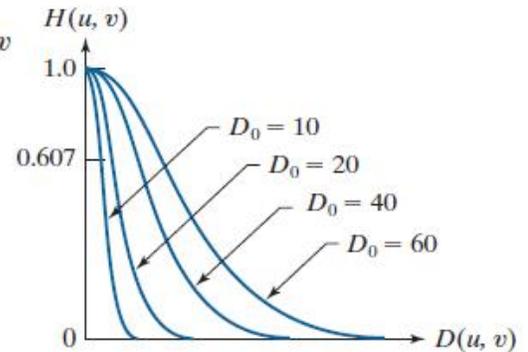
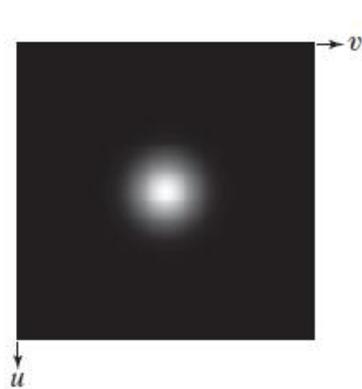
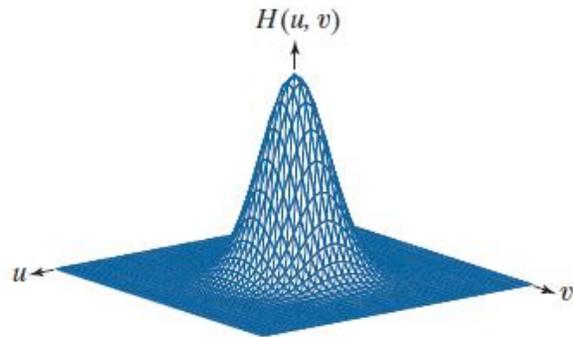
§4.9.3 高斯高通滤波器GHPF

■ 滤波函数

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

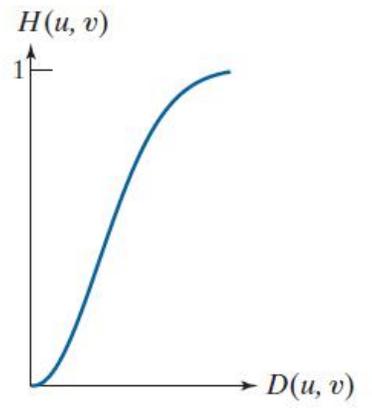
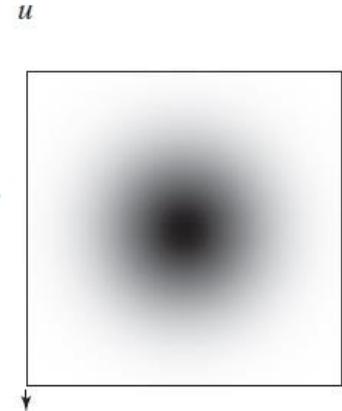
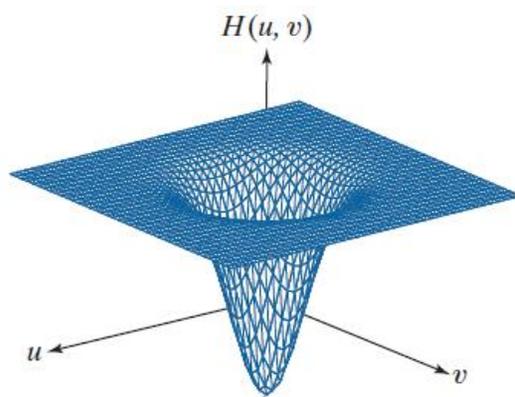
低通
lowpass

$$H(u, v) = e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$



高通
highpass

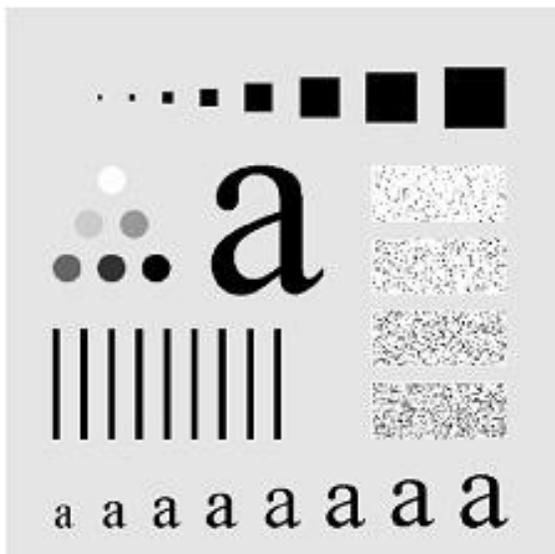
$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$



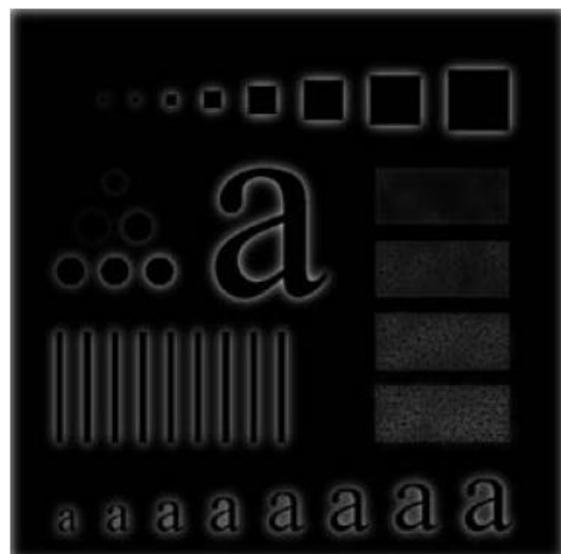
§4.9.3 高斯高通滤波器GHPF

■ Example of Gaussian highpass filtering

没有ringing, 且比巴特沃斯光滑



Input image



$D_0 = 30$

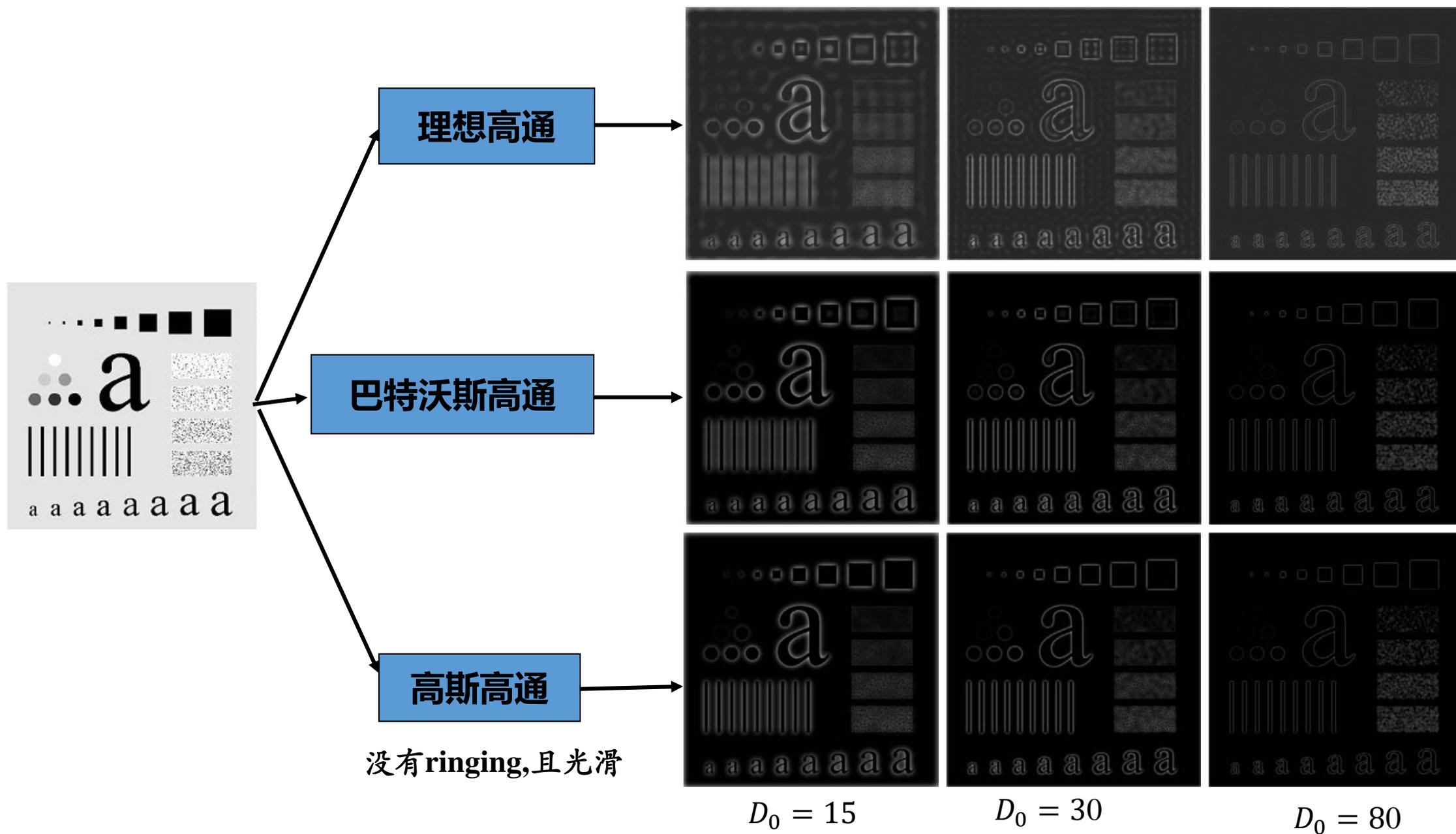


$D_0 = 60$



$D_0 = 160$

Ideal vs. Butterworth vs. Gaussian highpass



§4.9.4 频率域的拉普拉斯算子

■拉普拉斯算子频域滤波器

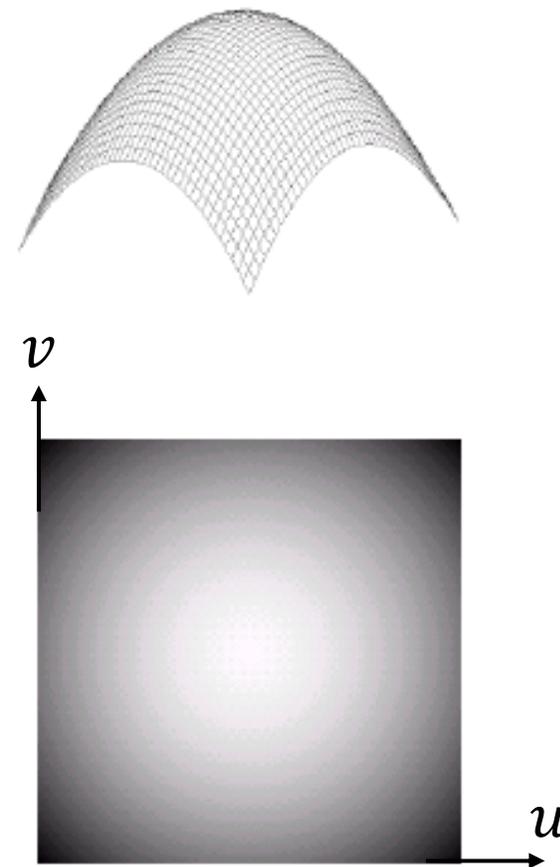
使用拉普拉斯算子在频域中滤波，可使用如下形式的 $H(u, v)$ ：

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

当使用频率矩形中心时，上式可写成如下形式：

$$H(u, v) = -4\pi^2 \left[\left(u - \frac{P}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2} \right)^2 \right]$$

$$H(u, v) = -4\pi^2 D^2(u, v) \quad D(u, v) = \left[\left(u - \frac{P}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$



§4.9.4 频率域的拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathfrak{T}^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$$

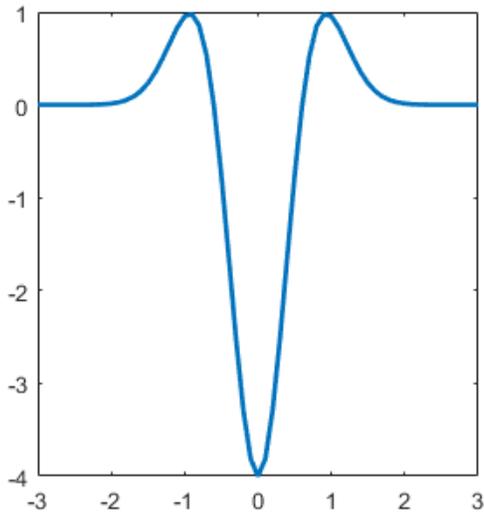
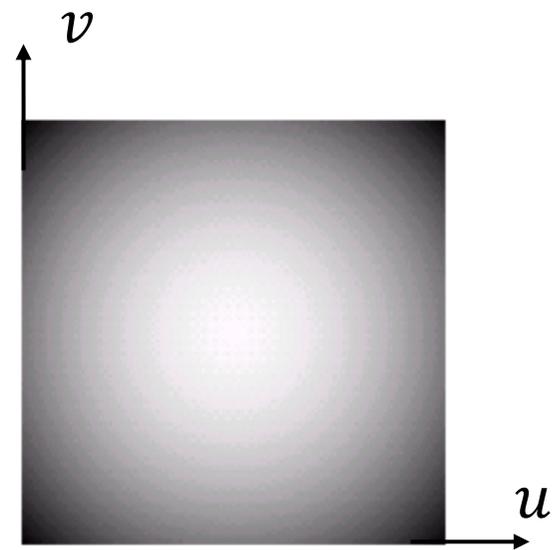


$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$



$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$H(u, v) = -4\pi^2 \left[\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2 \right]$$



$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathfrak{T}^{-1}\{F(u, v) - H(u, v)F(u, v)\} \\ &= \mathfrak{T}^{-1}\{F(u, v)[1 - H(u, v)]\} \\ &= \mathfrak{T}^{-1}\{F(u, v)[1 + 4\pi^2 D^2(u, v)]\} \end{aligned}$$

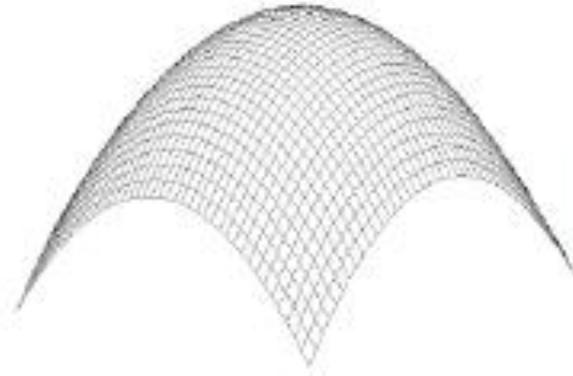
0	1	0
1	-4	1
0	1	0

§4.9.4 频率域的拉普拉斯算子

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{P}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

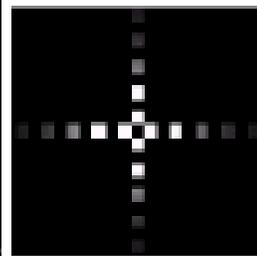
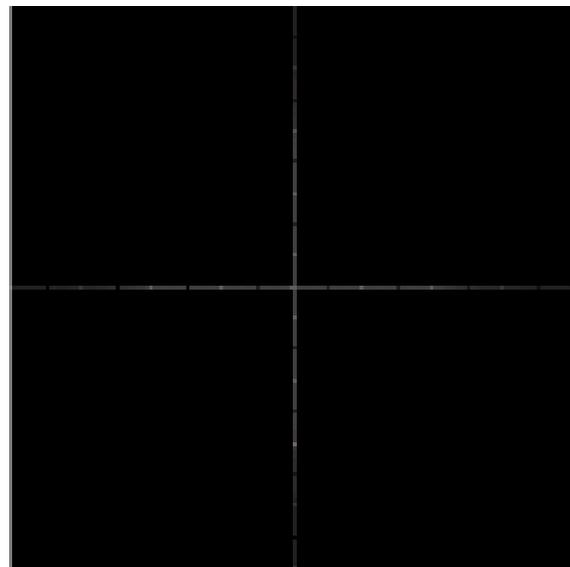
$$H(u, v) = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

频域



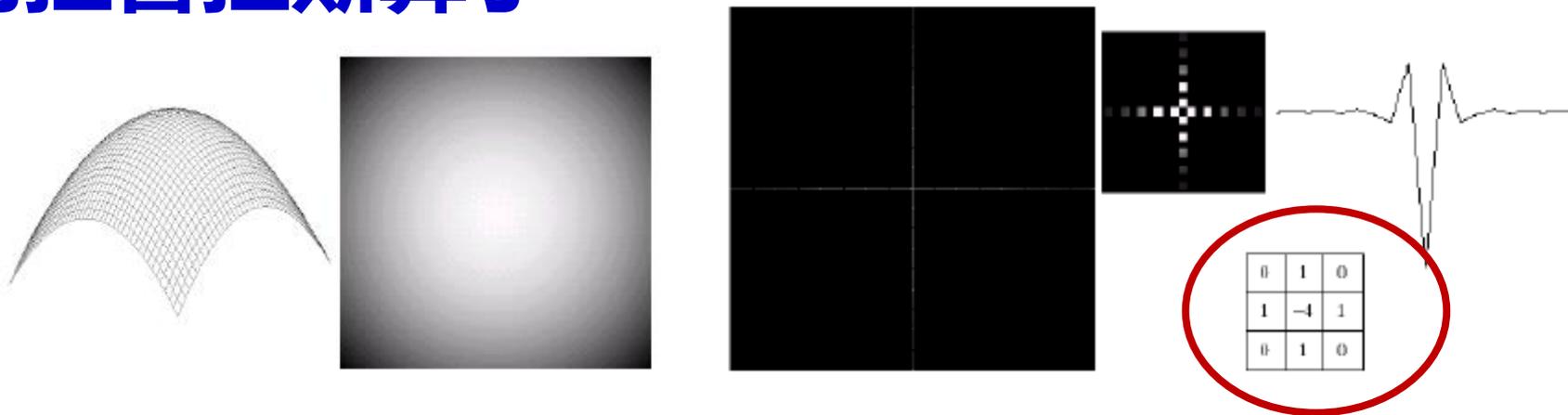
中心在 $(p/2, q/2)$ 处值为0,
其他为负值

空域



0	1	0
1	-4	1
0	1	0

§4.9.4 频率域的拉普拉斯算子



a b

FIGURE 4.56

(a) Original, blurry image.
(b) Image enhanced using the Laplacian in the frequency domain.
Compare with Fig. 3.46(d).
(Original image courtesy of NASA.)



§4.9.5 钝化模版、高频提升过滤和高频强调滤波

？ 为什么要进行高频提升和高频加强？

所有高通滤波后的图象都有一个共同特点：背景的平均强度减小到接近黑色；

这是因为高通滤波器除去了傅立叶变换的零频率成分($F(0, 0) = 0$)

- 解决办法：把原始图像加入到滤波后的结果中去，如拉普拉斯算子增强，这种处理称为高频提升过滤。它是钝化模板的推广。

§4.9.5 钝化模版、高频提升过滤和高频强调滤波

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{[1 + k * H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

其中，**红色部分称为高频强调滤波器**，高通滤波器通过将直流项置为0，导致滤波后图像的平混灰度减小为0。而高频强调滤波器可避免这一问题。

“1”：高通滤波器加1，使得零频率不被滤波器滤除

“k”：决定了影响最终结果的高频的比例

更一般的公式为：

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{[k_1 + k_2 * H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

其中， $k_1 \geq 0$ 给出了控制距原点的偏移量； $k_2 \geq 0$ 控制高频的贡献