



第5章 图像复原与重建

我们所看到的事物并不是事物的本身……物体本身是什么对我们而言完全是未知的，并且远离我们的感知。除了对物体的感知，我们什么也不知道。

——伊曼努尔·康德

引言

正像图像增强那样，图像复原技术的主要目的是以预先确定的目标来改善图像。尽管两者有相覆盖的领域，但图像增强主要是一个主观过程，而图像复原则大部分是一个客观过程。图像复原试图利用退化现象的某种先验知识来复原被退化的图像。因而，复原技术是面向退化模型的，并且采用相反的过程进行处理，以便恢复出原图像。

这种方法通常都会涉及设立一个最佳准则，它将产生期望结果的最佳估计。相比之下，图像增强技术基本上是一个探索性过程，即根据人类视觉系统的生理特点来设计一种改善图像的方法。例如，对比度拉伸被认为是一种增强技术，因为它主要基于给观看者提供其喜欢接受的图像，而通过去模糊函数去除图像模糊则被认为是一种图像复原技术。

本章中给出的素材严格地说只是介绍性的。我们仅从给出的一幅退化数字图像的特点来考虑复原问题；因此对传感器、数字化转换器和显示退化等话题考虑得较少。尽管这些主题在图像复原应用的整个处理中非常重要，但它们超出了本章所要讨论的范围。

正如第3章和第4章中讨论的那样，一些空间域复原技术已很好地阐述过了，而另一些复原技术则更适用于频率域。例如，当退化仅仅是加性噪声时，空间处理就非常适用。另一方面，如图像模糊这样的退化在空间域使用较小的滤波模板就很困难。在这种情况下，基于不同优化准则的频率域滤波是可选择的方法。这些滤波器同样也考虑到了噪声的存在。正如第4章中所讲的那样，频率域中用来解决给定应用的复原滤波器通常作为生成一个数字滤波器的基础，数字滤波器的程序操作更适合于用硬件或固件来实现。

5.1节介绍图像退化/复原过程的一个线性模型。5.2节处理实践中经常遇到的各种噪声模型。5.3节阐述降低图像噪声的几种空间滤波技术，即通常称为图像去噪的处理。5.4节致力于使用频率域降噪的技术。5.5节介绍图像退化的线性、位置不变模型，5.6节介绍估计退化函数的方法。5.7节至5.10节阐述基本的图像复原方法。本章最后(见5.11节)介绍由投影来重建图像。这一概念的主要应用是计算断层(CT)，即图像处理在健康领域最为重要的一种商业应用。

5.1 图像退化/复原过程的模型

如图 5.1 所示,在本章中,退化过程被建模为一个退化函数和一个加性噪声项,对一幅输入图像 $f(x, y)$ 进行处理,产生一幅退化后的图像 $g(x, y)$ 。给定 $g(x, y)$ 和关于退化函数 H 的一些知识以及关于加性噪声项 $\eta(x, y)$ 的一些知识后,图像复原的目的就是获得原始图像的一个估计 $\hat{f}(x, y)$ 。通常,我们希望这一估计尽可能地接近原始输入图像,并且 H 和 η 的信息知道得越多,所得到的 $\hat{f}(x, y)$ 就会越接近 $f(x, y)$ 。在本章中使用的大部分复原方法都是以不同类型的图像复原滤波器为基础的。

正如 5.5 节所示,如果 H 是一个线性的、位置不变的过程,那么空间域中的退化图像可由下式给出:

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y) \quad (5.1-1)$$

其中, $h(x, y)$ 是退化函数的空间表示;与第 4 章相同,符号“ $\star$ ”表示空间卷积。由 4.6.6 节的讨论可知,空间域中的卷积等同于频率域中的乘积,因此可以把式 (5.1-1) 中的模型写成等价的频率域表示:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (5.1-2)$$

其中的大写字母项是式 (5.1-1) 中相应项的傅里叶变换。这两个公式是本章中大部分复原内容的基础。

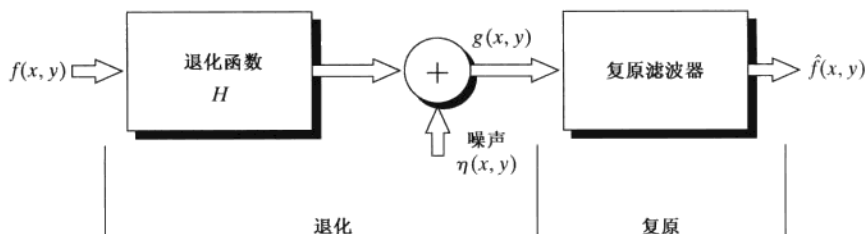


图 5.1 图像退化/复原过程的模型

在接下来的三节中,我们假设 H 是一个同一性算子,并且只处理由噪声引起的退化。从 5.6 节开始,我们考虑若干重要的图像退化函数,并考虑几个 H 和 η 同时存在的图像复原方法。

5.2 噪声模型

数字图像中,噪声主要来源于图像的获取和/或传输过程。成像传感器的性能受各种因素的影响,如图像获取过程中的环境条件和传感元器件自身的质量。例如,在使用 CCD 摄像机获取图像时,光照水平和传感器温度是影响结果图像中噪声数量的主要因素。图像在传输中被污染主要是由于传输信道中的干扰。例如,使用无线网络传输的图像可能会因为光照或其他大气因素而污染。

5.2.1 噪声的空间和频率特性

与我们的讨论相关的是定义噪声空间特性的参数,以及噪声是否与图像相关。频率特性是指傅里叶域中噪声的频率内容(即相对于电磁波谱的频率)。例如,当噪声的傅里叶谱是常量时,噪声通常称为白噪声。这个术语是从白光的物理特性派生出来的,它以相等的比例包含可见光谱中的几乎所有频率。从第 4 章的讨论中不难看出,以相同比例包含所有频率的函数的傅里叶谱是一个常量。

除了空间周期噪声(见 5.2.3 节)之外,在本章中我们假设噪声独立于空间坐标,并且噪声与图像本身不相关(即像素值与噪声分量的值之间不相关)。虽然这些假设至少在某些应用中(例如 X 射线和

核医学成像的有限量子成像就是一个很好的例子)是无效的,但处理空间相关和相关性噪声的复杂性超出了我们讨论的范围。

5.2.2 一些重要的噪声概率密度函数

基于前一节的假设,我们关心的空间噪声描述子就是图 5.1 中模型的噪声分量中灰度值的统计特性。可以认为它们是由概率密度函数(PDF)表征的随机变量。下面是在图像处理应用中最常见的 PDF。

关于概率论的简要回顾,请查阅本书的网站。

高斯噪声

在空间域和频率域中,由于高斯噪声在数学上的易处理性,故实践中常用这种噪声(也称为正态噪声)模型。事实上,这种易处理性非常方便,以至于高斯模型常常应用于在一定程度上导致最好结果的场合。

高斯随机变量 z 的 PDF 由下式给出:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2} \quad (5.2-1)$$

其中, z 表示灰度值, $\bar{z}$ 表示 z 的均(平均)^①值, σ 表示 z 的标准差。标准差的平方 σ^2 称为 z 的方差。高斯函数的曲线如图 5.2(a) 所示。当 z 服从式(5.2-1)的分布时,其值有大约 70% 落在范围 $[(\bar{z}-\sigma), (\bar{z}+\sigma)]$ 内,有大约 95% 落在范围 $[(\bar{z}-2\sigma), (\bar{z}+2\sigma)]$ 内。

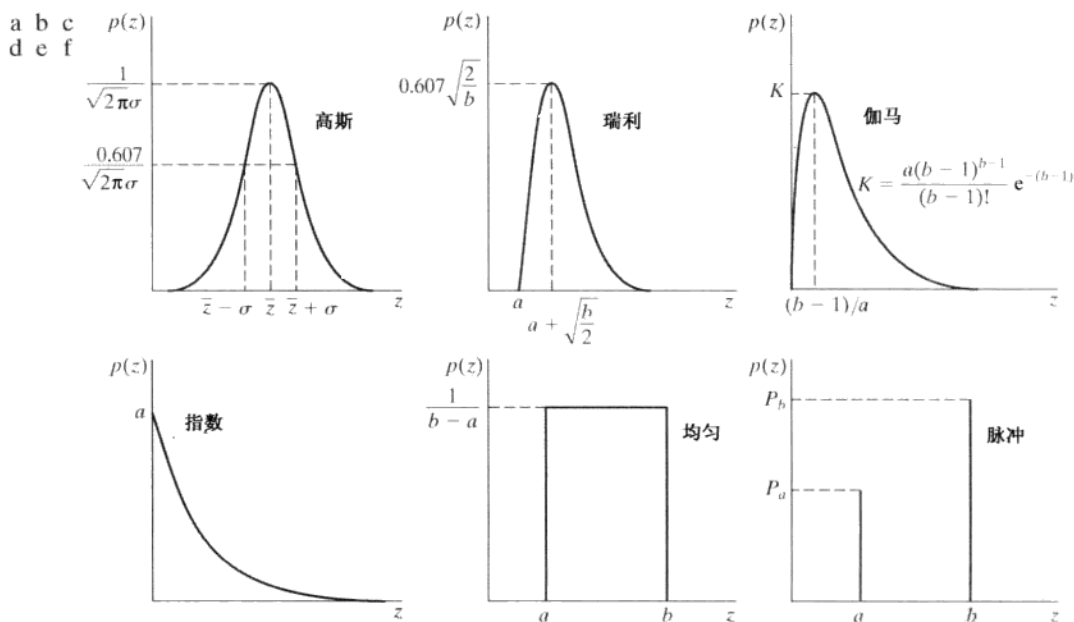


图 5.2 一些重要的概率密度函数

瑞利噪声

瑞利噪声的 PDF 由下式给出:

① 在本节中我们使用 $\bar{z}$ 而不是 m 来表示均值的原因是,避免我们在后面使用 m 和 n 来表示邻域大小时引起混淆。

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b}, & z \geq a \\ 0, & z < a \end{cases} \quad (5.2-2)$$

概率密度的均值和方差由

$$\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4} \quad (5.2-3)$$

和

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4} \quad (5.2-4)$$

给出。图5.2(b)显示了瑞利密度的曲线。注意，距原点的位移和密度的基本形状向右变形了这一事实。瑞利密度对于近似歪斜的直方图十分适用。

爱尔兰(伽马)噪声

爱尔兰噪声的 PDF 由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az}, & z \geq a \\ 0, & z < a \end{cases} \quad (5.2-5)$$

其中，参数 $a > 0$ ， b 为正整数，并且“!”表示阶乘。其概率密度的均值和方差由

$$\bar{z} = \frac{b}{a} \quad (5.2-6)$$

和

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2} \quad (5.2-7)$$

给出。图 5.2(c) 显示了伽马分布密度的曲线，尽管式(5.2-5)经常称之为伽马密度，但严格地说，这只有在分母为伽马函数 $\Gamma(b)$ 时才是正确的。当分母如表达式所示时，该密度称为爱尔兰密度更合适。

指数噪声

指数噪声的 PDF 由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (5.2-8)$$

其中， $a > 0$ 。该概率密度函数的均值和方差是

$$\bar{z} = \frac{1}{a} \quad (5.2-9)$$

和

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2} \quad (5.2-10)$$

注意，这个 PDF 是当 $b=1$ 时爱尔兰 PDF 的特殊情况。图 5.2(d) 显示了该密度函数的曲线。

均匀噪声

均匀噪声的 PDF 由下式给出：

$$p(z)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a\leq z\leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5.2-11}$$

该密度函数的均值由下式给出：

$$\bar{z}=\frac{a+b}{2} \tag{5.2-12}$$

它的方差由下式给出：

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12} \tag{5.2-13}$$

图 5.2(e) 显示了均匀密度的曲线。

脉冲(椒盐)噪声

(双极)脉冲噪声的 PDF 由下式给出：

$$p(z)=\begin{cases} P_a, & z=a \\ P_b, & z=b \\ 1-P_a-P_b, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.2-14}$$

如果 $b > a$ ，则灰度级 b 在图像中将显示为一个亮点；反之，灰度级 a 在图像中将显示为一个暗点。若 P_a 或 P_b 为零，则脉冲噪声称为单极脉冲。如果 P_a 和 P_b 两者均不可能为零，尤其是它们近似相等时，则脉冲噪声值将类似于在图像上随机分布的胡椒和盐粉微粒。由于这个原因，双极脉冲噪声也称为椒盐噪声。这种类型的噪声也可以使用散粒噪声和尖峰噪声来称呼。在下面的讨论中，我们将交替使用脉冲噪声和椒盐噪声这两个术语。

噪声脉冲可以为正也可以为负。标定通常是图像数字化处理的一部分。因为，与图像信号的强度相比，脉冲污染通常较大，所以在一幅图像中脉冲噪声通常被数字化为最大值(纯黑或纯白)。这样，通常假设 a 和 b 是饱和值，从某种意义上看，在数字化图像中，它们等于所允许的最大值和最小值。由于这一结果，负脉冲以一个黑点(胡椒点)出现在图像中。由于相同的原因，正脉冲以白点(盐粒点)出现在图像中。对于一幅 8 比特图像，典型地，这意味着 $a = 0$ (黑)和 $b = 255$ (白)。图 5.2(f) 显示了脉冲噪声的概率密度函数(PDF)。

前述的一组 PDF 为在实践中建立宽带噪声污染状态的模型提供了有用的工具。例如，在一幅图像中，高斯噪声源于诸如电子电路噪声以及由低照明度和/或高温带来的传感器噪声。瑞利密度有助于在深度成像中表征噪声现象。指数密度和伽马密度在激光成像中 useful。正如前段所提及的那样，脉冲噪声在快速过渡的情况下产生，如在成像期间发生的错误开关操作。均匀密度可能是实践中描述得最少的，然而，均匀密度作为仿真中使用的许多随机数生成器的基础是非常有用的(见 Peebles[1993] 和 Gonzalez, Woods and Eddins[2004])。

例 5.1 噪声图像及其直方图。

图 5.3 显示了一幅非常适合于阐述刚刚讨论的噪声模型的测试图案。这是一幅适合使用的图案，因为它是由简单的、恒定的区域所组成的，且其从黑到近似于白仅仅有 3 个灰度级增长跨度。这方便了附加在图像上的各种噪声分量特性的视觉分析。

图 5.4 显示的是叠加了本节所讨论的 6 种噪声的测试图案。每幅图像下面所示的是从图像直接计算得到的直方图。在每种情况下选择

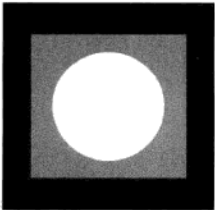


图 5.3 用于说明显示在图 5.2 中的噪声 PDF 特性的测试图案

了噪声的参数,以便对应于测试图案中3种灰度级的直方图会开始合并。这使得噪声十分显著,而不会遮蔽底层图像的基本结构。

比较图5.4中的直方图和图5.2中的概率密度函数,可以看到很接近的对应关系。对于椒盐噪声示例的直方图在密度标度的白端有一个额外的尖峰,因为噪声分量为纯黑或纯白,并且在测试图案中最亮的分量(圆)是亮灰度。除了少许亮度不同外,在图5.4中很难区别出前5幅图像有什么显著不同,即使它们的直方图有明显的区别。由脉冲噪声污染的图像的椒盐噪声的外观是唯一一种引起退化的、视觉上可区分的噪声类型。

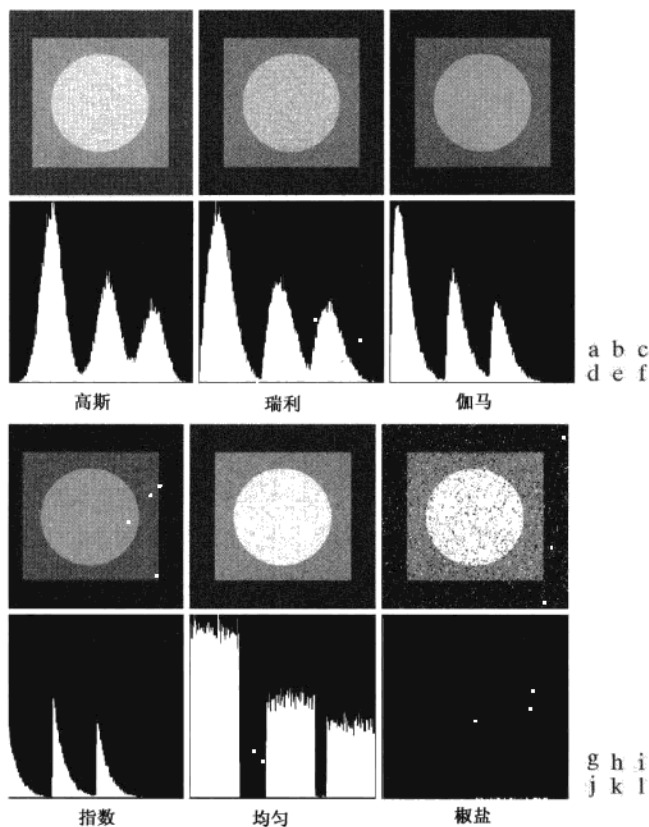


图 5.4 对图 5.3 中的图像添加高斯、瑞利、伽马、指数、均匀和椒盐噪声后的图像与直方图

5.2.3 周期噪声

一幅图像中的周期噪声是在图像获取期间由电力或机电干扰产生的。这是在本章中讨论的唯一的—种空间相关噪声。正如 5.4 节所讨论的那样,周期噪声可通过频率域滤波来显著地减少。例如,考虑图5.5(a)中的图像。这幅图像被不同频率的(空间)正弦噪声严重干扰了。一个纯正弦波的傅里叶变换是位于正弦波共轭频率处的一对共轭脉冲^①(见表4.3)。因此,如果空间域中正弦波的振幅足够强,我们在该图像的谱中将看到图像中每个正弦波的脉冲对。如图5.5(b)所示,确实如此,由于在这个特殊例子中频率值是这样安排的,所以脉冲以一个近似的圆出现。在 5.4 节我们将进一步讨论此问题,以及周期噪声的其他例子。

① 注意不要混淆频率域中的术语脉冲与脉冲噪声中使用的同一术语。

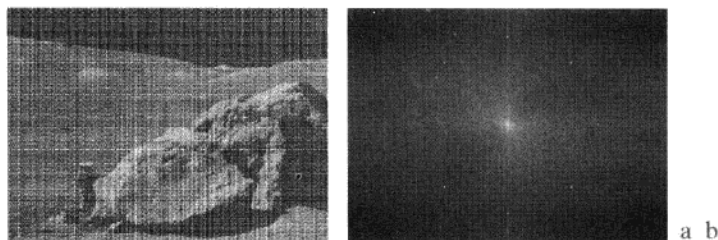


图 5.5 (a)被正弦噪声污染的图像; (b)谱(每对共轭脉冲对应于一个正弦波)(原图像由 NASA 提供)

5.2.4 噪声参数的估计

典型地,周期噪声的参数是通过检测图像的傅里叶谱来估计的。正如前几节提及的那样,周期噪声趋向于产生频率尖峰,甚至通过视觉分析也经常可以检测到这些尖峰。另一种方法是试图直接由图像推断出噪声分量的周期性,但这仅在非常简单的情况下才是可能的。在噪声尖峰格外显著或可以使用关于干扰的频率分量一般位置的某些知识时,自动分析是可能的。

噪声 PDF 的参数一般可以从传感器的技术说明中得知,但对于特殊的成像装置通常需要估计这些参数。如果成像系统可用,那么研究系统噪声特性的一种简单方法是获取一组“平坦”环境的图像。例如,在光学传感器的情况下,这像对一个光照均匀的纯色灰度板成像一样简单。结果图像是典型的系统噪声的良好指示器。

当仅有通过传感器生成的图像可用时,通常可由合理的恒定灰度值的一小部分来估计 PDF 的参数。例如,图 5.6 所示的垂直条带(150 × 20 像素)是从图 5.4 中所示的高斯、瑞利和均匀图像中截取的。所显示的直方图是使用这些小条带的图像数据计算出来的。与图 5.6 中的直方图对应的图 5.4 中的直方图,是图 5.4(d)、图 5.4(e)和图 5.4(k)这三组直方图中间的一组。我们可以看出,这些对应的直方图的形状非常接近于图 5.6 中的直方图的形状。由于缩放的原因,它们的高度不同,但形状明显类似。

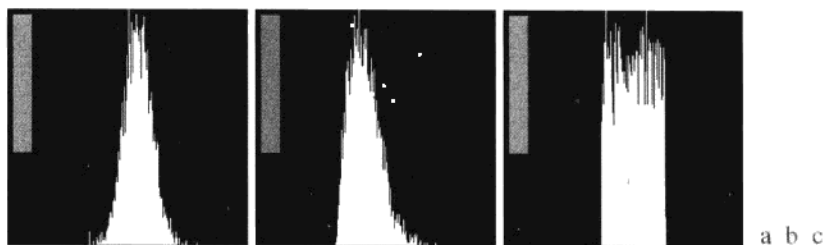


图 5.6 使用小条带(显示为插图)从图 5.4 中的(a)高斯、(b)瑞利和(c)均匀噪声图像计算的直方图

来自图像条带数据的最简单的用途是计算灰度级的均值和方差。考虑由 S 表示的一个条带(子图像),并令 $p_S(z_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, L-1$ 表示 S 中像素灰度的概率估计(归一化直方图值),其中 L 是整个图像中可能的灰度数(例如,对于 8 比特图像, L 为 256)。如第 3 章那样,我们估计 S 的均值和方差如下:

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p_S(z_i) \quad (5.2-15)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - \bar{z})^2 p_S(z_i) \quad (5.2-16)$$

直方图的形状确定最接近的 PDF 匹配。如果其形状近似于高斯,那么均值和方差正是我们所需要的,因为高斯 PDF 完全由这两个参数指定。对于 5.2.2 节讨论的其他形状,我们使用均值和方差来解出参数 a 和 b 。使用不同的方法来处理脉冲噪声,因为需要的估计是黑、白像素发生的实际概率。获得这些估计值需要黑白像素是可见的,因此为了计算直方图,图像中需要有一个相对恒定的中等灰度区域。对应于黑、白像素的尖峰的高度是式(5.2-14)中 P_a 和 P_b 的估计值。

5.3 只存在噪声的复原——空间滤波

当一幅图像中唯一存在的退化是噪声时,式(5.1-1)和式(5.1-2)变成

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y) \quad (5.3-1)$$

和

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v) \quad (5.3-2)$$

噪声项是未知的,故从 $g(x, y)$ 或 $G(u, v)$ 中减去它们不是一个现实的选择。在周期噪声的情况下,由 $G(u, v)$ 的谱来估计 $N(u, v)$ 通常是可能的,正如 5.2.3 节所述。在这种情况下,从 $G(u, v)$ 中减去 $N(u, v)$ 可得到原图像的一个估计。然而,这种类型的知识通常只是例外而不是规律。

当仅存在加性噪声的情况下,可以选择空间滤波方法。空间滤波已在第 3 章中详细讨论过了。除了执行一种特定的滤波来计算特性以外,下面实现的所有滤波的机理完全与 3.5 节和 3.6 节中讨论过的一样。

5.3.1 均值滤波器

在本节中,我们简要地讨论 3.5 节中介绍过的空间滤波器的降噪能力,并探讨一些其他的滤波器,这些滤波器的性能在许多情况下要优于 3.5 节中所讨论的滤波器的性能。

算术均值滤波器

这是最简单的均值滤波器。令 S_{xy} 表示中心在点 (x, y) 处、大小为 $m \times n$ 的矩形子图像窗口(邻域)的一组坐标。算术均值滤波器在 S_{xy} 定义的区域中计算被污染图像 $g(x, y)$ 的平均值。在点 (x, y) 处复原图像 $\hat{f}$ 的值,就是简单地使用 S_{xy} 定义的区域中的像素计算出的算术均值,即

假设 m 和 n 是奇整数。

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t) \quad (5.3-3)$$

这个操作可以使用大小为 $m \times n$ 的一个空间滤波器来实现,其所有的系数均为其值的 $1/mn$ 。均值滤波器平滑一幅图像中的局部变化,虽然模糊了结果,但降低了噪声。

几何均值滤波器

使用几何均值滤波器复原的一幅图像由如下表达式给出:

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s, t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}} \quad (5.3-4)$$

其中,每个复原的像素由子图像窗口中像素的乘积的 $1/mn$ 次幂给出。如例 5.2 所示,几何均值滤波器实现的平滑可与算术均值滤波器相比,但这种处理中丢失的图像细节更少。

谐波均值滤波器

谐波均值滤波操作由如下表达式给出：

$$\hat{f}(x,y)=\frac{mn}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}\frac{1}{g(s,t)}} \tag{5.3-5}$$

谐波均值滤波器对于盐粒噪声效果较好，但不适用于胡椒噪声。它善于处理像高斯噪声那样的其他噪声。

逆谐波均值滤波器

逆谐波均值滤波器基于如下表达式产生一幅复原的图像：

$$\hat{f}(x,y)=\frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)^Q} \tag{5.3-6}$$

其中 Q 称为滤波器的阶数。这种滤波器适合减少或在实际中消除椒盐噪声的影响。当 Q 值为正时，该滤波器消除胡椒噪声；当 Q 值为负时，该滤波器消除盐粒噪声。但它不能同时消除这两种噪声。注意，当 $Q=0$ 时，逆谐波均值滤波器简化为算术均值滤波器；而当 $Q=-1$ 时，则为谐波均值滤波器。

例 5.2 均值滤波器的说明。

图5.7(a)显示了一块电路板的 8 比特 X 射线图像，图5.7(b)显示了相同的图像，但图像已被均值为零、方差为 400 的加性高斯噪声污染了。对于这种类型的图像，这是非常严重的噪声。图 5.7(c)和图 5.7(d)分别显示了使用大小为 3×3 的算术均值滤波器和同样大小的几何均值滤波器滤除噪声后的结果。尽管这两种噪声滤波器对噪声的衰减都起到了作用，但几何均值滤波器并未像算术均值滤波器那样使图像变得模糊。例如，图像顶部的连接片在图5.7(d)中比在图5.7(c)中更为清晰。图像的其他部分同样如此。

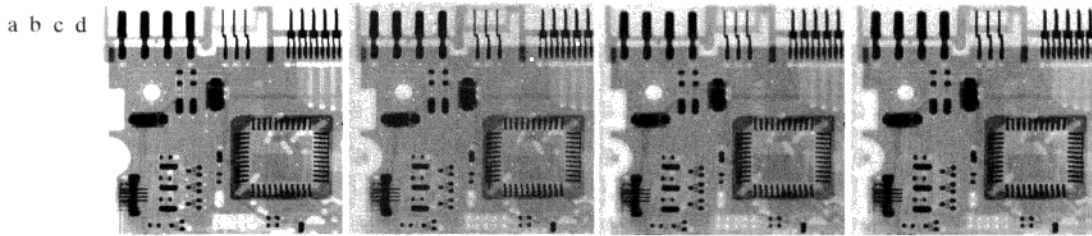


图 5.7 (a) X 射线图像；(b) 被加性高斯噪声污染的图像；(c) 使用大小为 3×3 的算术均值滤波器对图像滤波后的结果；(d) 使用相同大小的几何均值滤波器对图像滤波后的结果(原图像由 Lixi 公司的 Joseph E. Pascente 先生提供)

图 5.8(a) 显示了同样的电路图像，但被概率为 0.1 的胡椒噪声污染了。类似地，图 5.8(b) 显示了已被具有相同概率的盐粒噪声污染了的图像。图 5.8(c) 显示了使用 $Q = 1.5$ 的逆谐波均值滤波器对图 5.8(a) 滤波的结果。图 5.8(d) 显示了使用 $Q = -1.5$ 的逆谐波均值滤波器对图 5.8(b) 滤波后的结果。两种滤波器都有很好的去除噪声的效果。这种正阶滤波器除了使得暗区稍微有些淡化和模糊之外，都使背景变得更为清晰。负阶滤波器的作用正好相反。

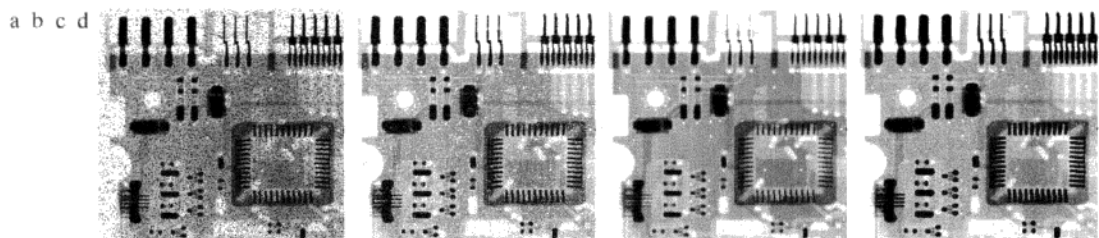


图 5.8 (a)被概率为 0.1 的胡椒噪声污染的图像；(b)被相同概率的盐粒噪声污染的图像；(c)使用大小为 3×3 、阶数为 1.5 的逆谐波均值滤波器对图 (a) 滤波后的结果；(d)使用 $Q = -1.5$ 的逆谐波均值滤波器对图 (b) 滤波后的结果

总之，算术均值滤波器和几何均值滤波器(尤其是后者)更适合于处理高斯或均匀随机噪声。逆谐波均值滤波器更适合于处理脉冲噪声，但它还有一个缺点，即必须知道噪声是暗噪声还是亮噪声，以便于为 Q 选择的正确的符号。如果 Q 的符号选择错了，则可能会引起灾难性的后果，如图 5.9 所示。下面几节讨论的一些滤波器可消除这种缺点。

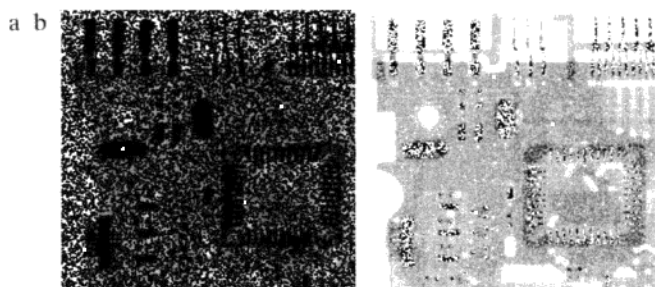


图 5.9 在逆谐波滤波中选择错误符号的结果：(a)使用大小为 3×3 且 $Q = -1.5$ 的逆谐波滤波器对图 5.8(a) 滤波后的结果；(b)当 $Q = 1.5$ 时对图 5.8(b) 滤波后的结果

5.3.2 统计排序滤波器

3.5.2 节介绍过统计排序滤波器。我们现在扩充那一节的讨论，并介绍其他一些统计排序滤波器。正如 3.5.2 节所述，统计排序滤波器是空间域滤波器，空间滤波器的响应基于由该滤波器包围的图像区域中的像素值的顺序(排序)。排序结果决定滤波器的响应。

中值滤波器

最著名的统计排序滤波器是中值滤波器，如其名称所暗示的那样，它使用一个像素邻域中的灰度级的中值来替代该像素的值，即

$$\hat{f}(x, y) = \text{median}_{(s, t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \quad (5.3-7)$$

在 (x, y) 处的像素值是计算的中值。中值滤波器的应用非常普遍，因为对于某些类型的随机噪声，它们可提供良好的去噪能力，且比相同尺寸的线性平滑滤波器引起的模糊更少。在存在单极或双极脉冲噪声的情况下，中值滤波器尤其有效。事实上，正如下面的例 5.3 所示，中值滤波器对于这种噪声污染的图像可得到非常好的处理效果。这种滤波器中值的计算和实现已在 3.5.2 节中进行了详细的讨论。

最大值和最小值滤波器

尽管中值滤波器是目前为止图像处理中最常用的一种统计排序滤波器,但它绝不是唯一的一种。中值相当于顺序排列的数组中间的那个数,但是您会从基本的统计学回想到排列本身还有很多其他的可能性。例如,可以使用序列中的最后一个数值,称为最大值滤波器,由下式给出:

$$\hat{f}(x, y) = \max_{(s, t) \in S_y} \{g(s, t)\} \quad (5.3-8)$$

这种滤波器对于发现图像中的最亮点非常有用。同样,因为胡椒噪声的值非常低,作为子图像区域 S_y 中这种最大值选择过程的结果,可以用这种滤波器降低它。

选择起始值的滤波器称为最小值滤波器,它由下式给出:

$$\hat{f}(x, y) = \min_{(s, t) \in S_y} \{g(s, t)\} \quad (5.3-9)$$

这种滤波器对于发现图像中的最暗点非常有用。同样,作为最小值操作的结果,它可以降低盐粒噪声。

中点滤波器

中点滤波器简单地计算滤波器包围区域中最大值和最小值之间的中点,即

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\max_{(s, t) \in S_y} \{g(s, t)\} + \min_{(s, t) \in S_y} \{g(s, t)\} \right] \quad (5.3-10)$$

注意,这种滤波器结合了统计排序和求平均。它对于随机分布噪声工作得最好,如高斯噪声或均匀噪声。

修正的阿尔法均值滤波器

假设在邻域 S_y 内去掉 $g(s, t)$ 最低灰度值的 $d/2$ 和最高灰度值的 $d/2$ 。令 $g_r(s, t)$ 代表剩下的 $mn-d$ 个像素。由这些剩余像素的平均值形成的滤波器称为修正的阿尔法均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn-d} \sum_{(s, t) \in S_y} g_r(s, t) \quad (5.3-11)$$

其中, d 的取值范围可为 0 到 $mn-1$ 。当 $d=0$ 时,修正的阿尔法均值滤波器退化为前一节讨论的算术均值滤波器。如果选择 $d=mn-1$,则修正的阿尔法均值滤波器将退化为中值滤波器。当 d 取其他值时,修正的阿尔法均值滤波器在包括多种噪声的情况下很有用,例如高斯噪声和椒盐噪声混合的情况下。

例 5.3 统计排序滤波器的说明。

图 5.10(a) 显示了被概率为 $P_a = P_b = 0.1$ 的椒盐噪声污染的电路板图像。图 5.10(b) 显示了用大小为 3×3 的中值滤波器滤波的结果。对图 5.10(a) 的改进是显而易见的,但一些噪声点仍然可见。使用中值滤波器 [对图 5.10(b) 中的图像] 进行第二次滤波处理后,去掉了大部分这样的噪声点,只剩下非常少的可见噪声点。这些噪声点在经过第三次中值滤波处理后全部消除了。这些结果是说明中值滤波器处理脉冲型加性噪声能力的很好的例子。记住,使用中值滤波器对图像重复地进行处理会使图像变模糊,所以希望保持尽可能低的处理次数。

图 5.11(a) 显示了把最大值滤波器用于图 5.8(a) 所示“胡椒”噪声图像的结果。这种滤波器对除去图像中的“胡椒”噪声的确很合适,但我们注意到它同时也从黑色物体的边缘去除了一些黑色像素(即将这些像素设置为亮灰度级)。图 5.11(b) 显示了把最小值滤波器用于图 5.8(b) 的结果。在这种情况下,在噪声消除方面,最小值滤波器的确比最大值滤波器更好,但它同时也从明亮物体的边缘去除了一些白色像素。这样就使亮物体变小,而同时使暗物体变大(就像图像顶部的连接片那样),因为围绕这些物体的白点被设置成了暗灰度级。

关于数的排列顺序的注释请参阅 10.3.5 节中的第二条注释。

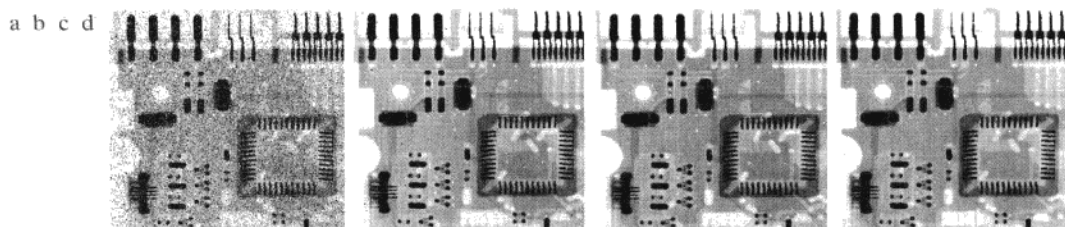


图 5.10 (a) 被概率为 $P_a = P_b = 0.1$ 的椒盐噪声污染的图像; (b) 使用大小为 3×3 的中值滤波器对图像滤波一次后的结果; (c) 使用该滤波器对图 (b) 滤波后的结果; (d) 使用相同的滤波器处理图 (c) 后的结果

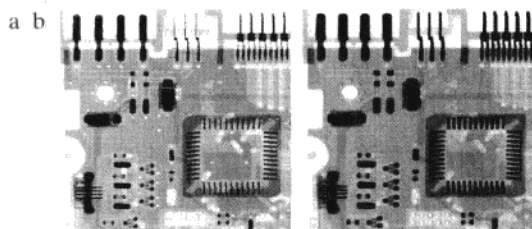


图 5.11 (a) 使用大小为 3×3 的最大值滤波器对图 5.8(a) 滤波后的结果;
(b) 使用相同大小的最小值滤波器对图 5.8(b) 滤波后的结果

下面说明修正的阿尔法均值滤波器。图 5.12(a) 显示了一幅被均值为零、方差为 800 的加性均匀噪声污染的图像。这是一种高级别的噪声污染, 它被 $P_a = P_b = 0.1$ 的椒盐噪声叠加而进一步恶化了, 如图 5.12(b) 所示。对这幅图像中的高级别噪声使用更大的滤波器是正确的。图 5.12(c) 到图 5.12(f) 依次显示了使用大小为 5×5 的算术均值、几何均值、中值和 $d = 5$ 的修正的阿尔法均值滤波器处理后的图像。正如所预料的那样, 由于脉冲噪声的存在, 算术均值滤波器和几何均值滤波器 (尤其是后者) 并没有起到良好的作用。中值滤波器和修正的阿尔法均值滤波器则好得多, 在降噪方面修正的阿尔法均值滤波器的效果更好一些。例如, 注意图像左上角第 4 个连接片在修正的阿尔法均值滤波器处理后变得稍微平滑一些。这并不意外, 因为对于高的 d 值, 修正的阿尔法均值滤波器接近于中值滤波器的性能, 但仍然保留了一些平滑能力。

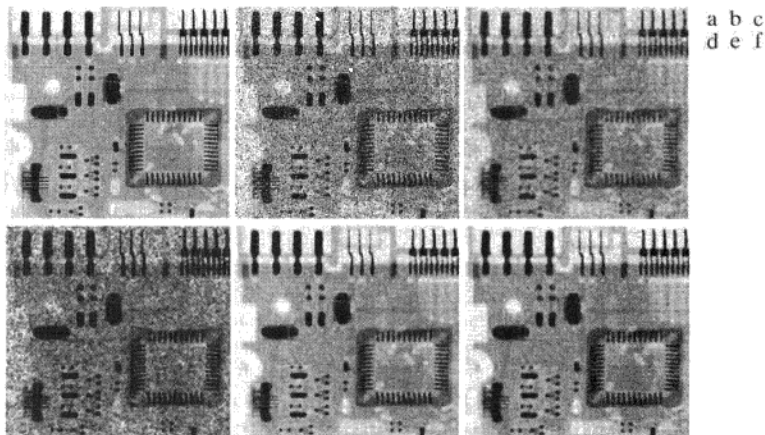


图 5.12 (a) 被加性均匀噪声污染的图像; (b) 再被加性椒盐噪声污染的图像; (c) 使用大小为 5×5 的算术均值滤波器对图 (b) 滤波后的结果; (d) 使用大小为 5×5 的几何均值滤波器对图 (b) 滤波后的结果; (e) 使用大小为 5×5 的中值滤波器对图 (b) 滤波后的结果; (f) 使用大小为 5×5 且 $d = 5$ 的修正的阿尔法均值滤波器对图 (b) 滤波后的结果

5.3.3 自适应滤波器

迄今为止讨论过的用于图像处理的滤波器并没有考虑图像中的一点对于其他点的特征变化。在这一节中,我们将考虑两个简单的自适应滤波器,滤波器的特性变化是以 $m \times n$ 的矩形窗口 S_{xy} 定义的滤波器区域内图像的统计特性为基础的。正如下面的讨论所表明的那样,自适应滤波器的性能要优于迄今为止讨论过的所有滤波器的性能。改善滤波能力的代价是滤波器的复杂度提高了。记住,我们一直在处理这样的情况,即退化图像等于原始图像加噪声。还没有考虑其他类型的退化。

自适应局部降低噪声滤波器

随机变量最简单的统计度量是其均值和方差。作为自适应滤波器的基础这些是合理的参数,因为它们是与图像表观紧密相关的量。均值给出了在其上计算均值的区域中的平均灰度的度量,而方差则给出了该区域的对比度的度量。

滤波器作用于局部区域 S_{xy} 。滤波器在该区域中心任意一点 (x, y) 上的响应基于以下 4 个量: (a) $g(x, y)$, 带噪图像在点 (x, y) 上的值; (b) σ_η^2 , 污染 $f(x, y)$ 以形成 $g(x, y)$ 的噪声的方差; (c) m_L , S_{xy} 中像素的局部均值; (d) σ_L^2 , S_{xy} 中像素的局部方差。我们希望滤波器的性能如下:

1. 如果 σ_η^2 为零,则滤波器应该简单地返回 $g(x, y)$ 的值。这无关紧要,在零噪声情况下 $g(x, y)$ 等于 $f(x, y)$ 。
2. 如果局部方差与 σ_η^2 是高度相关的,则滤波器返回 $g(x, y)$ 的一个近似值。典型地,高局部方差与边缘相关,并且应该保护这些边缘。
3. 如果两个方差相等,我们则希望滤波器返回 S_{xy} 中像素的算术均值。这种情况发生在局部区域与整个图像有相同特性的条件下,并且局部噪声将通过简单地求平均来降低。

基于这些假设得到的 $\hat{f}(x, y)$ 的自适应表达式可以写成

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - m_L] \quad (5.3-12)$$

唯一需要知道或估计的量是全部噪声的方差 σ_η^2 。其他参数要从每个 (x, y) 处的 S_{xy} 中的像素来计算, (x, y) 是滤波器窗口的中心。式 (5.3-12) 中隐含的假设为 $\sigma_\eta^2 \leq \sigma_L^2$ 。模型中的噪声是加性的和位置独立的,因此这是一个合理的假设,因为 S_{xy} 是 $g(x, y)$ 的子集。然而,我们很少有 σ_η^2 的确切知识,因此在实际中很可能违反这个条件。由于这个原因,式 (5.3-12) 的实现应建立一个测试,以便当条件 $\sigma_\eta^2 > \sigma_L^2$ 发生时,把比率设置为 1。这就造成该滤波器的非线性。然而,它可以防止由于缺乏图像噪声方差的知识而产生的无意义结果(即负灰度级,取决于 m_L 的值)。另一种方法是允许出现负值,并在最后重新标定灰度值。因而,结果将损失图像的动态范围。

例 5.4 自适应局部降低噪声滤波的说明。

图 5.13(a) 显示了被均值为零、方差为 1000 的加性高斯噪声污染的电路板图像。这是噪声污染水平严重的图像,但是,它却成为了一个比较相应滤波器性能的理想的测试基础。图 5.13(b) 是使用大小为 7×7 的算术均值滤波器处理噪声图像后的结果。噪声被平滑掉了,但代价是图像被严重模糊了。类似的解释也可用于图 5.13(c),它显示了使用大小还是 7×7 的几何均值滤波器处理噪声图像后的结果。这两幅滤波后的图像间的区别与我们在例 5.2 中讨论过的类似,仅仅是模糊程度的不同。

图 5.13(d) 显示了使用式 (5.3-12) 且 $\sigma_\eta^2 = 1000$ 的自适应滤波的结果。与前两个滤波器相比,该结果的

改进是很大的。从总体噪声减少情况来看,自适应滤波器所达到的效果与算术和几何均值滤波器相似。然而,使用自适应滤波器滤波后的图像更清晰一些。例如,在图 5.13(d) 中图像顶部的连接片更为清晰。其他特性,如孔和图像左下方暗部件的 8 根引脚等,在图 5.13(d) 中更加清楚。这些结果是使用自适应滤波器所能达到的典型结果。正如在早些时候提到过的那样,改进性能的代价是增加了滤波器的复杂性。

上面的结果中对 σ_n^2 用了一个值,该值准确地与噪声方差匹配。若该值未知,且使用了太低的估计值,则算法会因为校正量比应有的小而返回与原图像非常接近的图像。估计值太高则会造成方差的比率在 1.0 处被削平,并且算法会比正常情形下更频繁地从图像中减去平均值。如果允许为负值,且图像在最后被重新标定,则如前所述,结果将损失动态范围。

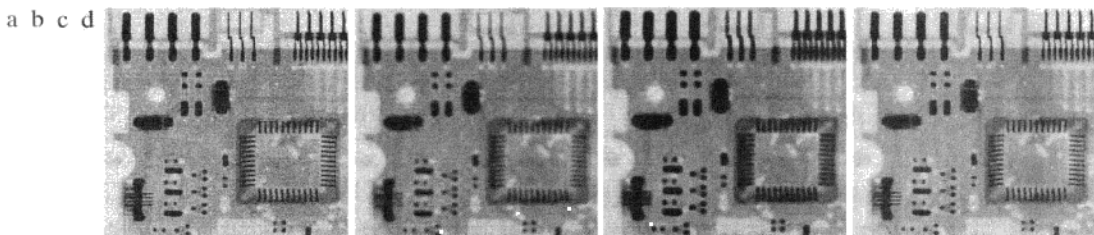


图 5.13 (a) 被均值为零、方差为 1000 的加性高斯噪声污染的图像; (b) 算术均值滤波的结果; (c) 几何均值滤波的结果; (d) 自适应降噪滤波的结果。所有滤波器的大小均为 7×7

自适应中值滤波器

对于 5.3.2 节所讨论的中值滤波器,只要脉冲噪声的空间密度不大,性能就会很好(根据经验, P_a 和 P_b 小于 0.2)。本节将证明,自适应中值滤波可以处理具有更大概率的脉冲噪声。自适应中值滤波器的另一个优点是平滑非脉冲噪声时试图保留细节,这是传统中值滤波器所做不到的。正如在前面几节中讨论的所有滤波器一样,自适应中值滤波器也工作于矩形窗口区域 S_{xy} 内。然而,与这些滤波器不同的是自适应中值滤波器在进行滤波处理时会根据本节列举的某些条件而改变(或增大) S_{xy} 的尺寸。记住,滤波器的输出是一个单值,该值用于代替点 (x, y) 处的像素值,点 (x, y) 是给定时刻窗口 S_{xy} 的中心。

考虑如下符号:

$$\begin{aligned} z_{\min} &= S_{xy} \text{ 中的最小灰度值} \\ z_{\max} &= S_{xy} \text{ 中的最大灰度值} \\ z_{\text{med}} &= S_{xy} \text{ 中的灰度值的中值} \\ z_{xy} &= \text{坐标}(x, y) \text{ 处的灰度值} \\ S_{\max} &= S_{xy} \text{ 允许的最大尺寸} \end{aligned}$$

自适应中值滤波算法以两个进程工作,表示为进程 A 和进程 B,如下所示:

$$\begin{aligned} \text{进程 A:} \quad & A_1 = z_{\text{med}} - z_{\min} \\ & A_2 = z_{\text{med}} - z_{\max} \\ & \text{如果 } A_1 > 0 \text{ 且 } A_2 < 0, \text{ 则转到进程 B} \\ & \text{否则增大窗口尺寸} \\ & \text{如果窗口尺寸} \leq S_{\max}, \text{ 则重复进程 A} \\ & \text{否则输出 } z_{\text{med}} \end{aligned}$$

进程 B:

$$B_1 = z_{xy} - z_{\min}$$
$$B_2 = z_{xy} - z_{\max}$$

如果 $B_1 > 0$ 且 $B_2 < 0$, 则输出 z_{xy}

否则输出 z_{med}

理解该算法机理的关键在于,要记住它有 3 个主要目的:去除椒盐(脉冲)噪声,平滑其他非脉冲噪声,并减少诸如物体边界细化或粗化等失真。值 $z_{\min}$ 和 $z_{\max}$ 在算法统计上认为是类脉冲噪声分量,即使它们在图像中并不是最低和最高的可能像素值。

利用这些观察结果,我们看到,进程 A 的目的是确定中值滤波器的输出 z_{med} 是否是一个脉冲(黑或白)。如果条件 $z_{\min} < z_{\text{med}} < z_{\max}$ 有效,则根据前节提到的原因, z_{med} 不可能是脉冲。在这种情况下,我们转到进程 B 进行测试,看窗口 z_{xy} 的中心点本身是否是一个脉冲(回忆可知 z_{xy} 是正被处理的点)。若条件 $B_1 > 0$ “与”(AND) $B_2 < 0$ 为真,则 $z_{\min} < z_{xy} < z_{\max}$, z_{xy} 就不是脉冲,原因与 z_{med} 不是脉冲相同。在这种情况下,算法输出一个不变的像素值 z_{xy} 。通过不改变这些“中间灰度级”的点,减少图像中的失真。如果条件 $B_1 > 0$ “与”(AND) $B_2 < 0$ 为假,则 $z_{xy} = z_{\min}$ 或 $z_{xy} = z_{\max}$ 。在任何一种情况下,像素值都是一个极端值,且算法输出中值 z_{med} ,从进程 A 可知 z_{med} 不是噪声脉冲。最后一步是执行标准的中值滤波。问题是,标准中值滤波器使用图像中相应邻域的中值代替该图像中的每一点,这会引来不必要的细节损失。

继续上面的说明,假设进程 A 确实找到了一个脉冲(若失败则测试会将它转到进程 B)。然后,算法会增大窗口尺寸并重复进程 A。该循环会一直继续,直到算法找到一个非脉冲的中值(并跳转到进程 B),或者达到了窗口的最大尺寸。如果达到了窗口的最大尺寸,则算法返回 z_{med} 值。注意,不能保证该值不是一个脉冲。噪声的概率 P_a 和/或 P_b 越小,或者 $S_{\max}$ 在允许的范围内越大,过早退出条件发生的可能性就会越小。这似乎是合理的。随着脉冲密度的增大,我们会需要更大的窗口来消除尖峰噪声。

算法每输出一个值,窗口 S_{xy} 就被移到图像中的下一个位置。然后,算法重新初始化并应用到新位置的像素。如习题 3.18 指出的那样,仅使用新像素就可以反复更新中值,因而减少了计算开销。

例 5.5 自适应中值滤波的说明。

图 5.14(a) 显示了被概率为 $P_a = P_b = 0.25$ 的“椒盐”噪声污染的电路板图像,该噪声的概率为图 5.10(a) 中所用噪声概率的 2.5 倍。此处噪声水平非常高,以至于模糊了图像的大部分细节。作为比较的基础,图像首先使用最小中值滤波器进行滤波,消除大部分可见的脉冲噪声痕迹。做这种处理需要一个大小为 7×7 的中值滤波器,并且处理结果显示在图 5.14(b) 中。虽然噪声被有效地消除了,但该滤波明显导致了图像细节的损失。例如,图像顶部的一些连接片出现了失真或断裂。其他的图像细节也同样失真了。

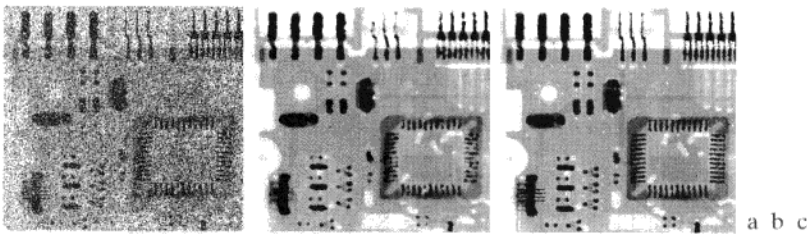


图 5.14 (a)被概率 $P_a = P_b = 0.25$ 的椒盐噪声污染的图像; (b)使用大小为 7×7 的中值滤波器的对图像滤波的结果; (c)使用 $S_{\max} = 7$ 的自适应中值滤波器对图像滤波的结果

图 5.14(c) 显示了使用 $S_{\max} = 7$ 的自适应中值滤波器的结果。噪声消除性能与中值滤波器相似。但是,自适应滤波器在保持清晰度和细节方面的确做得要好。连接片几乎没有失真,使用中值滤波器时被模糊

或失真而无法识别的一些特征,在图5.14(c)中变得更尖锐和清楚。两个明显的例子是穿透主板的小白孔,以及图像左下四分之一处有8根引脚的黑色器件。

考虑到图5.14(a)中的高水平噪声,自适应算法的性能已经非常好了。允许选择的最大窗口尺寸取决于应用,但合理的初始值可以首先通过使用各种尺寸的标准中值滤波器进行实验来估计。这将根据自适应算法的期望性能建立直观的基准。

5.4 用频率域滤波消除周期噪声

用频率域技术可以有效地分析并滤除周期噪声。其基本概念是在傅里叶变换中,周期噪声在对应于周期干扰的频率处,以集中的能量脉冲形式出现。其方法是用一个选择性滤波器分离出噪声(见4.10节)。在5.4.1节到5.4.3节中,为消除基本的周期噪声,将使用三种类型的选择性滤波器(4.10节中介绍过的带阻、带通和陷波滤波器)。在5.4.4节中,我们还将介绍一种最佳陷波方法。

5.4.1 带阻滤波器

在4.10.1节中介绍的理想、布特沃斯和高斯带阻滤波器的传递函数总结在表4.6中。图5.15显示了这些滤波器的透视图,并且,下面的例子说明了使用一个带阻滤波器降低周期噪声的效果。

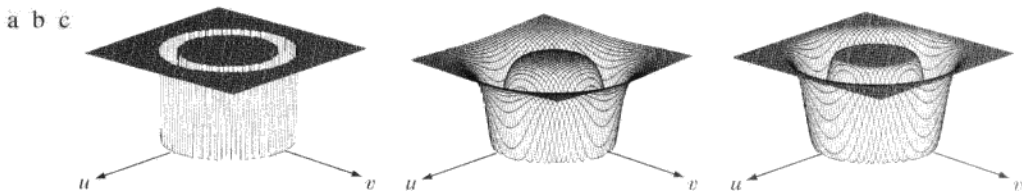


图5.15 从左到右依次为理想滤波器、布特沃斯滤波器(阶数为1)和高斯带阻滤波器的透视图

例5.6 使用带阻滤波器消除周期性噪声。

带阻滤波器的主要应用之一是在频率域噪声分量的一般位置近似已知的应用中消除噪声。一个典型的例子就是一幅被加性周期噪声污染的图像,该噪声可被近似为二维正弦函数。不难看出,一个正弦波的傅里叶变换由两个脉冲组成,它们是关于变换域坐标原点互为镜像的图像。它们的位置在表4.3中给出。两个脉冲实际上都是虚的(正弦曲线的傅里叶变换的实部为零),而且彼此为复共轭。我们在5.4.3节和5.4.4节中还将详述该主题。目前,我们的目的是先说明带阻滤波器。

图5.16(a)与图5.5(a)相同,显示了被不同频率的正弦噪声严重污染的图像。噪声分量很容易地被看成是图5.16(b)中显示的傅里叶频谱中对称的亮点对。本例中,噪声分量位于关于变换原点的近似圆上,因此使用圆对称带阻滤波器是一个正确的选择。图5.16(c)显示了一个4阶布特沃斯带阻滤波器,它设置了适当的半径和宽度,完全包围了噪声脉冲。由于通常希望从变换中尽可能小地消除细节,因此在带阻滤波中通常要求尖锐的窄滤波器。使用该滤波器对图5.16(a)滤波的效果显示在图5.16(d)中。其改进是非常明显的。即使细小的细节和纹理也被这一简单的滤波方式有效地修复了。还应注意,使用小卷积模板的直接空间域滤波方法不可能取得相同的结果。

5.4.2 带通滤波器

带通滤波器执行与带阻滤波器相反的操作。在4.10.1节显示了如何通过式(5.4-1)使用传递函数为 $H_{BR}(u, v)$ 的带阻滤波器得到带通滤波器的传递函数 $H_{BP}(u, v)$:

$$H_{BP}(u,v)=1-H_{BR}(u,v)$$

(5.4-1)

作为练习(见习题 5.12), 请读者根据表 4.6 中的带阻滤波器来推导对应的带通滤波器的表达式。

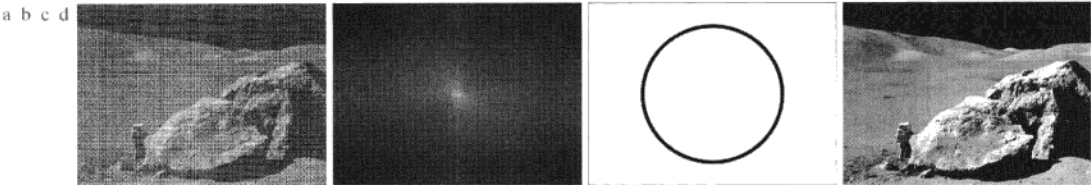


图 5.16 (a)被正弦噪声污染的图像; (b)图(a)的谱; (c)布特沃斯带阻滤波器(白色代表 1); (d)滤波的结果(原图像由 NASA 提供)

例 5.7 使用带通滤波提取噪声模式。

通常不会在一幅图像上直接执行带通滤波, 因为这样会消除太多的图像细节。然而, 带通滤波在一幅图像中屏蔽选中频段导致的效果时非常有用。这是图 5.17 中的说明。产生这幅图像的方法是: (1)应用式(5.4-1)得到与图 5.16 中使用的带阻滤波器相对应的带通滤波器; (2)取带通滤波变换的反变换。使用这种方法会丢失图像的大部分细节, 不过保留的信息是非常有用的。显然, 使用这种方法复原的噪声模式与图 5.16(a)中污染图像的噪声非常接近。换句话说, 带通滤波帮助屏蔽了噪声模式。这是一个有用的结果, 因为它简化了噪声分析, 而与图像内容无关。

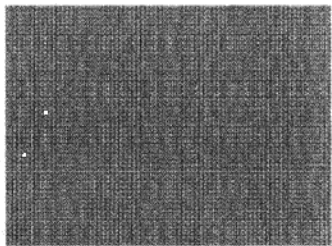


图 5.17 由带通滤波获得的图 5.16(a)所示图像的噪声图案

5.4.3 陷波滤波器

陷波滤波器阻止(或通过)事先定义的中心频率的邻域内的频率。陷波滤波的公式详见 4.10.2 节。图 5.18 分别显示了理想、布特沃斯和高斯陷波(带阻)滤波器的三维图。由于傅里叶变换的对称性, 要获得有效的结果, 陷波滤波器必须以关于原点对称的形式出现。这个原则的特例是, 如果陷波滤波器位于原点处, 在这种情况下, 陷波滤波器是其本身。虽然为便于说明的目的, 我们只列举了一对陷波滤波器, 但可实现的陷波滤波器的对数是任意的。陷波区域的形状也可以是任意的(例如矩形)。

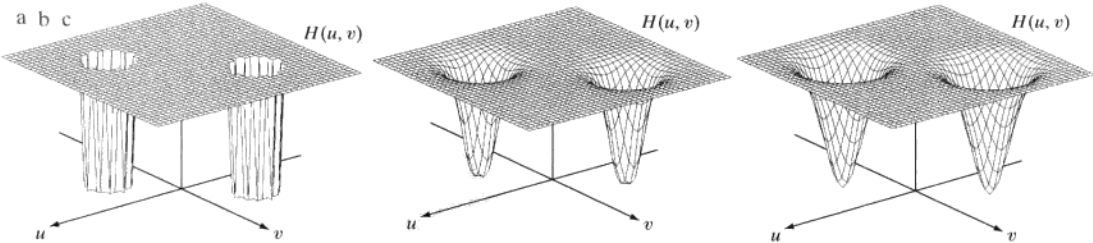


图 5.18 (a)理想、(b)布特沃斯(2 阶)和(c)高斯陷波(带阻)滤波器的透视图

如 4.10.2 节中描述的那样, 我们可以得到通过而不是抑制陷波区域中所包含频率的陷波滤波器。因为这些滤波器执行与陷阻滤波器完全相反的功能, 故它们的传递函数由下式给出:

$$H_{NP}(u,v)=1-H_{NR}(u,v)$$

(5.4-2)

式中, $H_{NP}(u,v)$ 是陷波(带通)滤波器的传递函数, 这个陷波(带通)滤波器与传递函数为 $H_{NR}(u,v)$ 的陷波(带阻)滤波器相对应。

例 5.8 用陷波滤波器消除周期性噪声。

图 5.19(a) 显示了与图 4.51(a) 相同的图像。以下的陷波滤波方法会降低该图像中的噪声，而不会引入我们在 4.8.4 节中看到明显的模糊。除非因为该节我们讨论过的原因，模糊是我们所希望的，否则如果找到了一个合适的滤波器，则陷波滤波会更好一些。

观察图 5.19(a) 中近似水平线的噪声模式，我们希望它在频率域内的成分沿垂直轴集中。然而，图 5.19(b) 所示的谱是很显然的，噪声没有明显到具有足够清楚的模式。通过沿傅里叶变换的垂直轴构建一个简单的理想陷波带通滤波器，我们可以得到噪声成分的外表特征的概念，如图 5.19(c) 所示。噪声模式的空间表示(陷波带通滤波结果的反变换)示于图 5.19(d)。这种噪声模式与图 5.19(a) 中的模式相对应。创建一个合适的以合理的程度屏蔽噪声的陷波带通滤波器，我们可由式(5.4-2)获得相应的陷波带阻滤波器。使用陷波带阻滤波器处理图像后的结果如图 5.19(e) 所示。该图像与图 5.19(a) 相比，包含有几乎看不见的噪声扫描线。

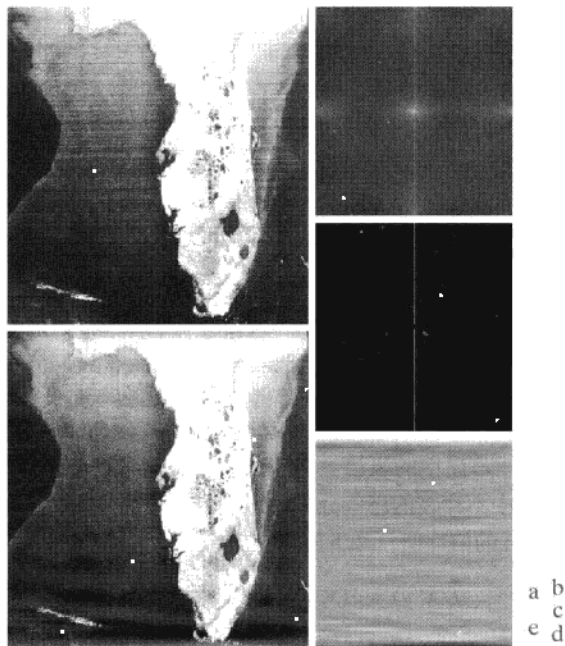


图 5.19 (a) 佛罗里达和墨西哥湾的卫星图像，显示有水平扫描线；(b) 图(a)的谱；(c) 叠加在图(b)上的陷波带通滤波器；(d) 空间噪声模式；(e) 陷波带阻滤波的结果(原图像由 NOAA 提供)

5.4.4 最佳陷波滤波

作为周期性图像退化的另一个例子，图 5.20(a) 显示了“水手 6 号”飞船拍摄的一幅关于火星地形的数字图像。其干扰模式与图 5.16(a) 中显示的有些相似，但前者的模式更为精细，因而在频率平面上更难检测。图 5.20(b) 显示了该问题图像的傅里叶谱。类似星形的分量是由于干扰引起的，而且存在几对分量，指出该模式包含不止一个正弦分量。

当存在几种干扰分量时，前面几节讨论的方法有时就不能采用了，因为它们在滤波过程中可能会消除太多的图像信息(当图像很特别或者很难获取时，很不希望有这种现象)。另外，干扰成分通常不是单频脉冲。相反，它们通常有携带干扰模式信息的宽边缘。从正常的变换背景中有时不容易检测到这些边缘。在许多应用中，降低这些退化影响时选择滤波方法将非常有用。这里讨论的方法是最佳的，因为在一定意义上，它最小化了复原的估计值 $\hat{f}(x, y)$ 的局部方差。

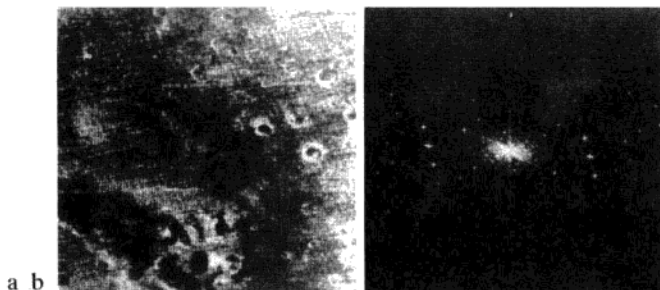


图 5.20 (a) “水手 6 号”飞船拍摄的火星地形图像; (b) 显示有周期干扰的傅里叶谱(图像由 NASA 提供)

该过程由两步组成, 第一步屏蔽干扰的主要成分, 然后从被污染的图像中减去该模式的一个可变的加权部分。虽然我们是在一个特定的应用中来研究这一过程, 但这个基本方法仍然十分通用, 而且能应用到其他复原工作中, 在这些复原工作中, 多周期性干扰是主要问题。

第一步是提取干扰模式的主频率分量。像之前那样, 这可通过在每个尖峰处放置一个陷波带通滤波器 $H_{NP}(u, v)$ 来完成。如果滤波器构建为只可通过与干扰模式相关的分量, 那么干扰噪声模式的傅里叶变换由下式给出:

$$N(u, v) = H_{NP}(u, v)G(u, v) \quad (5.4-3)$$

其中, 如通常那样, $G(u, v)$ 仍为被污染图像的傅里叶变换。

$H_{NP}(u, v)$ 的形式需要多方面判断哪些是尖峰噪声干扰。为此, 通常要通过观察显示的 $G(u, v)$ 的频谱来交互地创建陷波带通滤波器。选择一个特殊滤波器之后, 空间域中的相应模式可由下式获得:

$$\eta(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H_{NP}(u, v)G(u, v)\} \quad (5.4-4)$$

因为被污染图像假设是由未污染图像 $f(x, y)$ 与干扰相加形成的, 若 $\eta(x, y)$ 完全已知, 则从 $g(x, y)$ 减去该干扰模式得到 $f(x, y)$ 将是非常简单的事情。当然, 问题是这个滤波过程通常只会得到真实干扰模式的近似值。在 $\eta(x, y)$ 的估计中不存在的那些分量的影响可以被最小化, 方法是从 $g(x, y)$ 中减去 $\eta(x, y)$ 的一个加权部分来得到 $f(x, y)$ 的估计值, 如下所示:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y) \quad (5.4-5)$$

其中, 如先前那样, $\hat{f}(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 的估计值, 而 $w(x, y)$ 需要决定。函数 $w(x, y)$ 称为加权函数或调制函数, 此过程的目的就是选取该函数, 以便以某种有意义的方法来优化结果。一种方法是选取 $w(x, y)$, 使估计值 $\hat{f}(x, y)$ 在每一点 (x, y) 的指定邻域上的方差最小。

考虑关于点 (x, y) 的大小为 $(2a+1)(2b+1)$ 的邻域。在坐标 (x, y) 处, $\hat{f}(x, y)$ 的局部方差可根据样本估计, 如下所示:

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b [\hat{f}(x+s, y+t) - \bar{\hat{f}}(x, y)]^2 \quad (5.4-6)$$

其中, $\bar{\hat{f}}(x, y)$ 是该邻域内 $\hat{f}$ 的平均值, 即

$$\bar{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \hat{f}(x+s, y+t) \quad (5.4-7)$$

在图像边缘上或接近图像边缘的点, 可以用局部邻域或用 0 填充的方法处理。

把式 (5.4-5) 代入式 (5.4-6), 得

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x+s, y+t) - w(x+s, y+t)\eta(x+s, y+t)] - [\bar{g}(x, y) - \overline{w(x, y)\eta(x, y)}] \}^2 \quad (5.4-8)$$

假设 $w(x, y)$ 在整个邻域内基本保持不变, 则当 $-a \leq s \leq a$ 和 $-b \leq t \leq b$ 时, 可给出近似式

$$w(x+s, y+t) = w(x, y) \quad (5.4-9)$$

这一假设在该邻域内也可得出如下表达式:

$$\overline{w(x, y)\eta(x, y)} = \overline{w(x, y)}\bar{\eta}(x, y) \quad (5.4-10)$$

由这些近似, 式(5.4-8)变为

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x+s, y+t) - w(x, y)\eta(x+s, y+t)] - [\bar{g}(x, y) - \overline{w(x, y)\eta(x, y)}] \}^2 \quad (5.4-11)$$

为最小化 $\sigma^2(x, y)$, 解下式得到 $w(x, y)$:

$$\frac{\partial \sigma^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0 \quad (5.4-12)$$

结果为

$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\overline{\eta^2(x, y)} - \bar{\eta}^2(x, y)} \quad (5.4-13)$$

要获得复原图像 $\hat{f}(x, y)$, 可根据式(5.4-13)计算 $w(x, y)$, 然后使用式(5.4-5)。如果 $w(x, y)$ 在某一邻域内假设为常量, 则不必对图像中的每个 x 和 y 值计算该函数, 而是在每个非重叠邻域的一点(一般为中心点)计算 $w(x, y)$, 然后将它用于处理该邻域内包含的所有图像点。

例 5.9 最佳陷波滤波的说明。

图5.21 到图5.23 显示了对图5.20(a)应用前述技术处理后的效果。该图像的大小为 512×512 像素, 并且选择了 $a = b = 15$ 的邻域。图 5.21 显示了被污染图像的傅里叶谱。在这种特殊情况下, 原点未移到频率平面的中心, 因此 $u = v = 0$ 在图 5.21 所示变换图像的左上角。图 5.22(a) 显示了 $N(u, v)$ 的谱, 其中只存在尖峰噪声。图 5.22(b) 显示了取 $N(u, v)$ 的傅里叶反变换得到的干扰模式 $\eta(x, y)$ 。注意, 这个干扰模式与图 5.20(a) 中存在的噪声结构很相似。最后, 图 5.23 显示了应用式(5.4-5)处理后得到的图像。出于实用的目的, 周期干扰已被消除。

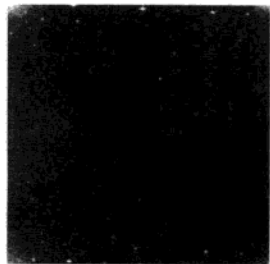


图 5.21 图 5.20(a) 所示图像的(未移位的)傅里叶谱(图像由 NASA 提供)

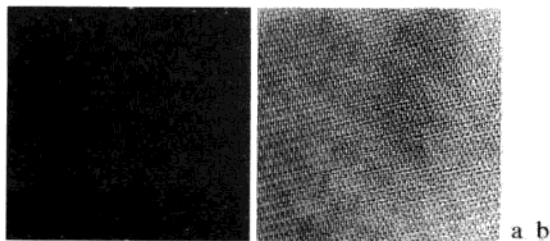


图 5.22 (a) $N(u, v)$ 的傅里叶谱; (b) 相应的噪声干扰模式 $\eta(x, y)$ (图像由 NASA 提供)



图 5.23 处理后的图像(图像由 NASA 提供)

5.5 线性、位置不变的退化

图像复原前, 图 5.1 中的输入/输出关系可以表示为

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y) \quad (5.5-1)$$

现在, 让我们假设 $\eta(x, y) = 0$, 则 $g(x, y) = H[f(x, y)]$ 。基于 2.6.2 节的讨论, 如果

$$H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)] \quad (5.5-2)$$

则系统 H 是一个线性系统, 其中 a 和 b 是标量, $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ 是两幅输入图像。

关于线性系统理论的简要回顾, 请参阅本书的网站。

若 $a = b = 1$, 则式 (5.5-2) 变为

$$H[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = H[f_1(x, y)] + H[f_2(x, y)] \quad (5.5-3)$$

这就是所谓的加性。这一特性简单地表明, 如果 H 为线性算子, 那么两个输入之和的响应等于两个响应之和。

如果 $f_2(x, y) = 0$, 则式 (5.5-2) 变为

$$H[af_1(x, y)] = aH[f_1(x, y)] \quad (5.5-4)$$

我们称之为均匀性。它表明任何与常数相乘的输入的响应等于该输入响应乘以相同的常数, 即一个线性算子具有加性和均匀性。

一个算子对于任意 $f(x, y)$, α 和 β , 如果

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta) \quad (5.5-5)$$

则输入/输出关系具有 $g(x, y) = H[f(x, y)]$ 的算子称为位置(或空间)不变系统。该定义说明图像中任意一点处的响应只取决于该点处的输入值, 而与该点的位置无关。

在式 (4.5-3) 中, 稍微(等效)改变一下离散冲激函数定义的符号, 就可将 $f(x, y)$ 表示为

关于连续与离散变量的讨论, 请参阅 5.11.3 节的脚注。

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (5.5-6)$$

再次假设 $\eta(x, y) = 0$, 然后把式 (5.5-6) 代入式 (5.5-1) 可得

$$g(x, y) = H[f(x, y)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right] \quad (5.5-7)$$

如果 H 是线性算子, 且我们把加性性质扩展到积分, 则有

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \quad (5.5-8)$$

由于 $f(\alpha, \beta)$ 独立于 x 和 y , 使用均匀性可得

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \quad (5.5-9)$$

公式

$$h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] \quad (5.5-10)$$

称为系统 H 的冲激响应。也就是说, 在式 (5.5-1) 中, 如果 $\eta(x, y) = 0$, 则 $h(x, \alpha, y, \beta)$ 是系统 H 对坐

标 (x, y) 处的一个冲激的响应。在光学中, 冲激为一个光点, 所以 $h(x, \alpha, y, \beta)$ 通常称为点扩散函数 (PSF)。这一名称来自于这样一个事实, 即所有物理光学系统在一定程度上会模糊 (扩散) 光点, 模糊程度由光学部件的质量决定。

将式 (5.5-10) 代入式 (5.5-9), 可得

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta \quad (5.5-11)$$

这称为第一类叠加 (弗雷德霍姆) 积分。该表达式是线性系统理论核心中的一个基础结果。它表明, 如果系统 H 对一个冲激的响应已知, 则对于任意输入 $f(\alpha, \beta)$ 的响应可用式 (5.5-11) 来计算。换句话说, 线性系统 H 完全可由其冲激响应来表征。

如果 H 是位置不变的, 由式 (5.5-5) 可得

$$H[\delta(x-\alpha, y-\beta)] = h(x-\alpha, y-\beta) \quad (5.5-12)$$

在这种情况下, 式 (5.5-11) 简化为

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x-\alpha, y-\beta) d\alpha d\beta \quad (5.5-13)$$

该式为式 (4.2-20) 对一个变量的卷积积分, 并在习题 4.11 中扩展到 2 维。该积分告诉我们, 对于任意输入 f , 若已知线性系统的冲激响应, 就可以计算出它的响应 g 。结果是冲激响应和输入函数的简单卷积。

在有加性噪声的情况下, 线性退化模型 [见式 (5.5-11)] 的表达式变为

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (5.5-14)$$

如果 H 是位置不变的, 则式 (5.5-14) 变为

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x-\alpha, y-\beta) d\alpha d\beta + \eta(x, y) \quad (5.5-15)$$

噪声项 $\eta(x, y)$ 的值是随机的, 并假设这些噪声项与位置无关。使用常用的卷积符号, 可将式 (5.5-15) 写为

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y) \quad (5.5-16)$$

或者基于卷积定理 (见 4.6.6 节), 我们可在频率域中将它表示为

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (5.5-17)$$

这两个表达式与式 (5.1-1) 和式 (5.1-2) 是一致的。记住, 对于离散值来说, 所有的乘积是逐项相乘的。例如, $H(u, v)F(u, v)$ 的 ij 项是 $H(u, v)$ 的 ij 项和 $F(u, v)$ 的 ij 项的乘积。

总之, 前述讨论表明, 具有加性噪声的线性空间不变退化系统, 可在空间域建模为退化 (点扩散) 函数与一幅图像的卷积, 然后再加上噪声。基于卷积定理, 在频率域中, 同样的过程可表示为图像和退化函数的变换的乘积, 然后再加上噪声的变换。在频率域中工作时, 可以使用 4.11 节中讨论的一种 FFT 算法。还应记住, 如 4.6.6 节所述, 在实现离散傅里叶变换时, 需要对函数进行填充。

许多类型的退化可近似为线性、位置不变的过程。这种方法的优点是可以使用许多线性系统理论的工具来解决图像复原问题。与位置有关的非线性技术虽然更普遍 (通常会更精确), 但它们会带来没有已知解的困难, 或者解决计算问题时非常困难。本章将集中在线性、空间不变的复原技术上。由于退化被建模为卷积的结果, 并且图像复原试图找到应用相反过程的滤波器, 所以术语图像去卷积通常用于表示线性图像复原。同样, 用于复原处理的滤波器常常称为去卷积滤波器。

5.6 估计退化函数

在图像复原中,主要有3种用于估计退化函数的方法:(1)观察法,(2)试验法,(3)数学建模法。以下几节将讨论这些方法。使用以某种方式估计的退化函数来复原一幅图像的过程,有时称为盲目去卷积,因为真正的退化函数很少能完全知晓。

5.6.1 图像观察估计

假设给我们一幅退化图像,而没有关于退化函数 H 的任何知识。基于图像被线性、位置不变的过程退化的假设,估计 H 的一种方法就是从图像本身来收集信息。例如,如果图像已被模糊,则我们可以观察图像中包含样本结构的一个小矩形区域,如某一物体和背景的一部分。为了降低噪声的影响,我们可以寻找一个有很强信号内容的区域(如高对比度区域)。下一步是处理子图像以便得到尽可能不模糊的结果。例如,我们可以使用锐化滤波器对这个子图像进行锐化处理,甚至可以使用手工方法处理小区域。

令 $g_s(x, y)$ 表示要观察的子图像,令 $\hat{f}_s(x, y)$ 表示处理过的子图像(现实中,该图像是原图像在该区域的估计图像)。然后,假设噪声的影响由于选择了一个强信号区域而可以忽略,根据式(5.5-17)可得

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)} \quad (5.6-1)$$

根据这一函数特性,然后,我们可基于位置不变的假设还原完整的退化函数 $H(u, v)$ 。例如,假设 $H_s(u, v)$ 的径向曲线具有高斯曲线的近似形状。我们可以利用这一信息在更大比例上构建一个有基本相同形状的函数 $H(u, v)$ 。然后,在下面几节讨论的一种复原方法中使用 $H(u, v)$ 。很清楚,这是仅在特殊环境下使用的很麻烦的处理,例如复原一幅有历史价值的老照片。

5.6.2 试验估计

如果可以使用与获取退化图像的设备相似的装置,从理论上讲,得到一个准确的退化估计是可能的。与退化图像类似的图像可以通过各种系统设置得到,直到这些图像退化到尽可能接近我们希望复原的程度。之后,概念是使用相同的系统对一个冲激(小亮点)成像,得到退化的冲激响应。正如5.5节所表明的那样,线性空间不变系统完全由其冲激响应来表征。

一个冲激可由一个亮点来模拟,该点应尽可能亮,以便将噪声的影响降低到可以忽略的程度。回顾一下,由于冲激的傅里叶变换是一个常量,由式(5.5-17)可得下式:

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A} \quad (5.6-2)$$

其中,与之前一样,函数 $G(u, v)$ 是观察图像的傅里叶变换, A 是一个描述冲激强度的常量。图5.24显示了一个例子。



图 5.24 冲激特性的退化估计:(a) 一个亮冲激(放大显示);(b) 图像处理(退化)后的冲激

5.6.3 建模估计

由于退化建模能解决图像复原问题,因此多年来一直被人们使用。在某些情况下,模型甚至可以考虑引起退化的环境条件。例如,由 Hufnagel 和 Stanley[1964]提出的退化模型是基于大气湍流的物理特性的。该模型的通用形式为

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}} \quad (5.6-3)$$

其中, k 是与湍流的性质有关的常数。除了指数为 $5/6$ 幂之外,该式与 4.8.3 节所述的高斯低通滤波有相同的形式。事实上,高斯 LPF 有时用于模型淡化,均匀模糊。图 5.25 显示了使用式 (5.6-3) 并取 $k = 0.0025$ (剧烈湍流)、 $k = 0.001$ (中等湍流) 和 $k = 0.000\ 25$ (轻微湍流) 来模拟模糊一幅图像时得到的例子。所有图像的大小均为 480×480 像素。

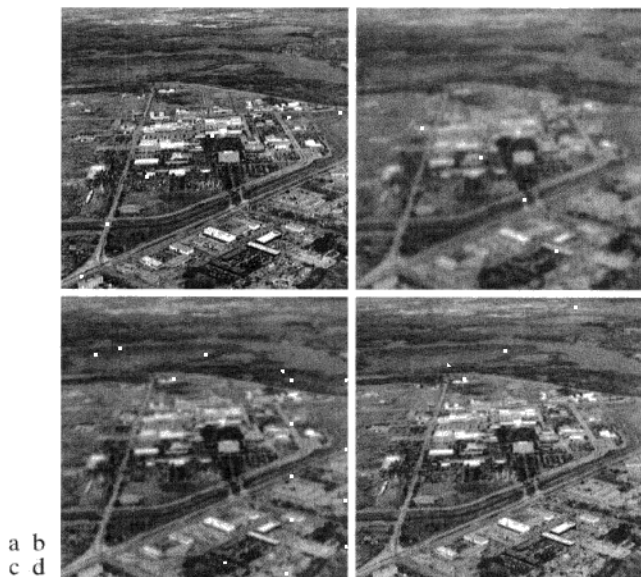


图 5.25 大气湍流模型的说明: (a) 可忽略的湍流; (b) 剧烈湍流, $k = 0.0025$; (c) 中等湍流, $k = 0.001$; (d) 轻微湍流, $k = 0.000\ 25$ (原图像由 NASA 提供)

建模的另一个主要方法是从基本原理开始推导一个数学模型。我们通过详细讨论一个实例来解释这一过程。在这个实例中,图像获取时被图像与传感器之间的均匀线性运动模糊了。假设图像 $f(x, y)$ 进行平面运动, $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别是在 x 和 y 方向上随时间变化的分量。那么,在记录介质(如胶片或数字存储器)任意点的曝光总数是通过对时间间隔内瞬时曝光量的积分得到的,图像系统的快门在该时间段是开着的。假设快门的开启和关闭所用时间非常短,那么光学成像过程不会受到图像运动的干扰。若设 T 为曝光时间,则有

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \quad (5.6-4)$$

其中, $g(x, y)$ 为模糊后的图像。

由式 (4.5-7), 式 (5.6-4) 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}
 G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^T f[x-x_0(t), y-y_0(t)] dt \right] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy
 \end{aligned} \quad (5.6-5)$$

改变积分顺序, 式(5.6-5)可表示为

$$G(u, v) = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x-x_0(t), y-y_0(t)] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \quad (5.6-6)$$

外层方括号内的积分项是位移函数 $f[x-x_0(t), y-y_0(t)]$ 的傅里叶变换。利用式(4.6-4)可得到表达式

$$G(u, v) = \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt = F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt \quad (5.6-7)$$

这里, 最后一步是根据 $F(u, v)$ 与 t 无关得出的。

令

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt \quad (5.6-8)$$

式(5.6-7)可表示为我们熟悉的如下形式:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \quad (5.6-9)$$

若运动变量 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 已知, 则可直接由式(5.6-8)得到传递函数 $H(u, v)$ 。作为一个说明, 假设问题中的图像只在 x 方向以给定的速度 $x_0(t) = at/T$ 做匀速直线运动。当 $t=T$ 时, 图像位移的总距离为 a 。令 $y_0(t)=0$, 由式(5.6-8)可得

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi u x_0(t)} dt = \int_0^T e^{-j2\pi u at/T} dt = \frac{T}{\pi ua} \sin(\pi ua) e^{-j\pi ua} \quad (5.6-10)$$

上式表明, 由 $u = n/a$ 给出的 u 值处, H 变为零, 其中 n 为整数。若允许 y 分量也随着变化, 按 $y_0 = bt/T$ 给出的运动, 则退化函数变为

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua+vb)} \sin[\pi(ua+vb)] e^{-j\pi(ua+vb)} \quad (5.6-11)$$

如表 4.3 结尾处解释的那样, 我们使用 u 和 v 来对式(5.6-11)取样, 以便生成一个离散滤波器。

例 5.10 由于运动引起的图像模糊。

图 5.26 (b) 是由计算图 5.26 (a) 中图像的傅里叶变换模糊的一幅图像, 其过程是用式(5.6-11)中的 $H(u, v)$ 乘以变换, 再做反变换。图像大小为 688×688 像素, 在式(5.6-11)中使用的参数为 $a = b = 0.1$ 和 $T = 1$ 。正如 5.8 节和 5.9 节所讨论的那样, 从模糊图像中复原出相应的原图像会存在某些有趣的挑战, 特别是当退化图像中存在噪声时。

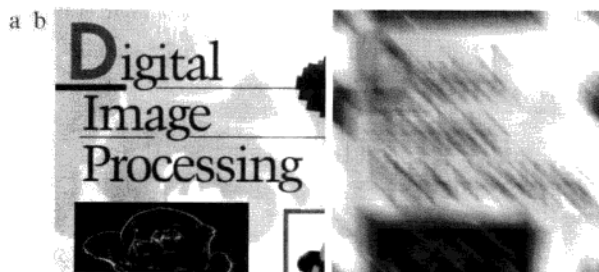


图 5.26 (a) 原图像; (b) 使用式(5.6-11)中的函数, 且 $a = b = 0.1$ 和 $T = 1$ 模糊图像后的结果

5.7 逆滤波

本节的内容是研究由退化函数 H 退化的图像复原的最初手段。退化函数已给出, 或由前一节讨论的那些方法获得。最简单的复原方法是直接做逆滤波, 在这里, 我们用退化函数除退化图像的傅里叶变换 $G(u, v)$ 来计算原始图像傅里叶变换的估计 $\hat{F}(x, y)$, 即

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad (5.7-1)$$

该除法是阵列操作, 正如 2.6.1 节中定义的那样, 并联系式 (5.5-17)。用式 (5.1-2) 的右侧替代式 (5.7-1) 中的 $G(u, v)$, 得到

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)} \quad (5.7-2)$$

这是一个有趣的表达式。它告诉我们, 即使知道退化函数, 也不能准确地复原未退化的图像 $[F(u, v)]$ 的傅里叶反变换, 因为 $N(u, v)$ 未知。还有更糟的情况, 如果退化函数是零或是非常小的值, 则 $N(u, v)/H(u, v)$ 之比很容易支配估计值 $\hat{F}(u, v)$ 。事实上, 这是经常出现的情况, 下面很快会证明这一点。

解决退化函数为零或为非常小的值的问题的一种方法是限制滤波的频率, 使其接近原点。从式 (4.6-21) 的讨论, 我们知道 $H(0, 0)$ 在频率域中通常是 $H(u, v)$ 的最高值。因此, 通过将频率限制在原点附近分析, 就减少了遇到零值的概率。下面的例子中说明了这种方法。

例 5.11 逆滤波。

图 5.25 (b) 是对产生退化图像的退化函数精确取反, 并使用式 (5.7-1) 反向滤波的图像。也就是, 使用的退化函数是

$$H(u, v) = e^{-k[(u-M/2)^2 + (v-N/2)^2]^{5/6}}$$

其中 $k = 0.0025$ 。 $M/2$ 和 $N/2$ 常数是偏移值; 它们使函数居中, 以便与居中的傅里叶变换对应, 就像前一章中多次讨论过的那样。在这个例子中, $M=N=480$ 。我们知道, 高斯形函数没有零值, 因此这里不用关心它。然而, 尽管如此, 退化值变得非常小, 以至于全逆滤波的结果 [见图 5.27 (a)] 毫无用处。产生这个失败结果的原因正如式 (5.7-2) 所讨论的那样。

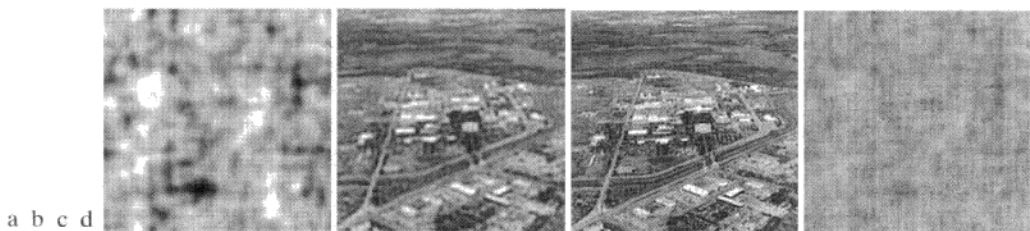


图 5.27 用式 (5.7-1) 复原图 5.25 (b): (a) 用全滤波器的结果; (b) 截止半径为 40 时用 H 的结果; (c) 半径为 70 时的结果; (d) 半径为 85 时的结果

图 5.27 (b) 到图 5.27 (d) 显示了比率 $G(u, v)/H(u, v)$ 的截止值的结果, 半径分别为 40, 70 和 85。截止是通过对这个比值应用一个阶数为 10 的布特沃斯低通函数来实现的。这在期望的半径处提供了较尖锐 (但平滑) 的过渡。半径在 70 左右时视觉效果最好 [见图 5.27 (c)], 半径在 70 以下时图像开始变得模糊, 如图 5.27 (b) 所示, 它是用半径 40 得到的。其值大于 70 时, 图像开始退化, 如图 5.27 (d) 所示, 它是用半径 85 得到的。在噪声“窗帘”后面的图像中, 图像的内容几乎是可见的, 但噪声明显地支配着该结果。进一步增大半径值, 会使得图像越来越像图 5.27 (a)。

这个例子的结果表明,一般直接滤波的性能是较差的。接下来的三节将探讨怎样改进直接滤波的性能。

5.8 最小均方误差(维纳)滤波

前一节讨论的滤波方法并没有清楚地说明怎样处理噪声。在这一节,我们讨论一种综合了退化函数和噪声统计特征进行复原处理的方法。该方法建立在图像和噪声都是随机变量的基础上,目标是找到未污染图像 f 的一个估计 $\hat{f}$, 使它们之间的均方误差最小。这种误差度量由下式给出:

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\} \quad (5.8-1)$$

其中, $E\{\cdot\}$ 是参数的期望值。这里假设噪声和图像不相关, 其中一个或另一个有零均值, 且估计中的灰度级是退化图像中灰度级的线性函数。基于这些条件, 式(5.8-1)中误差函数的最小值在频率域中由如下表达式给出:

$$\begin{aligned} \hat{F}(u, v) &= \left[\frac{H^*(u, v) S_f(u, v)}{S_f(u, v) |H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)} \right] G(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \right] G(u, v) \\ &= \left[\frac{1}{H(u, v) |H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \right] G(u, v) \end{aligned} \quad (5.8-2)$$

这里, 我们用了这样一个事实: 一个复数量与其共轭的乘积等于该复数量幅度的平方。这个结果就是众所周知的维纳滤波, 该概念由 N. Wiener[1942]首次提出。由方括号中的项组成的滤波器通常也称为最小均方误差滤波器或最小二乘误差滤波器。本章最后列出了一些参考资料, 包括了维纳滤波器的详细推导过程。注意式(5.8-2)的第一行, 维纳滤波器没有滤波中退化函数为零的问题, 除非对于相同的 u 值和 v 值, 整个分母都是零。

式(5.8-2)中各项的意义如下所示:

$H(u, v)$ = 退化函数

$H^*(u, v)$ = $H(u, v)$ 的复共轭

$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v) H(u, v)$

$S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$ = 噪声的功率谱 [见式(4.6-18)]^①

$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ = 未退化图像的功率谱

与前面一样, $H(u, v)$ 是退化函数的变换, 而 $G(u, v)$ 是退化图像的变换。空间域中复原的图像由频率域估计 $\hat{F}(u, v)$ 的傅里叶反变换给出。注意, 如果噪声为零, 则噪声功率谱消失, 并且维纳滤波简化为逆滤波。

许多有用的度量是以噪声和未退化图像的功率谱为基础的, 其中最重要的一种是信噪比, 它在频率域中用下式来近似:

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2}{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |N(u, v)|^2} \quad (5.8-3)$$

① 项 $|N(u, v)|^2$ 也称为噪声的自相关。该术语源自相关定理(见表 4.3 中的性质 7)。当两个函数相同时, 两个函数的相关就变成了自相关, 该性质的右侧变成 $N^*(u, v) N(u, v)$, 它等于 $|F(u, v)|^2$ 。类似的说明同样适用于 $|F(u, v)|^2$, 即它是图像的自相关。第 12 章中将详细探讨相关。

注意整个图像都被考虑为随机变量, 详见 2.6.8 节末尾的讨论。

该比值给出了携带信息的信号功率(即原始的或退化的原图像)水平与噪声功率水平的度量。携带低噪声的图像有较高的 SNR, 而携带较高噪声水平的同一幅图像有较低的 SNR。这一比值是一个有限的值, 但在用于表征复原算法的性能时它是一个重要的度量。

式(5.8-1)中以统计形式给出的均方误差, 也可描述为涉及原图像和复原图像的和的形式:

$$\text{MSE} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2 \quad (5.8-4)$$

事实上, 如果把复原图像考虑为“信号”, 而把复原图像和原图像的差考虑为噪声, 那么我们可以将空间域中的信噪比定义为

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}(x, y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2} \quad (5.8-5)$$

f 和 $\hat{f}$ 越接近, 该比值就较大。有时, 用这一度量的均方根来代替, 这种情况, 该比值称为均方根信噪比或均方根误差。正如以前我们多次提到的那样, 必须记住该定量度量与感觉的图像质量并没有很好的必然关系。

当我们处理白噪声时, 谱 $|N(u, v)|^2$ 是一个常数, 这大大简化了处理。然而, 未退化图像的功率谱很少是已知的。当这些量未知或不能估计时, 经常使用的一种方法是由下面的表达式来近似式(5.8-2):

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v) \quad (5.8-6)$$

式中, K 是一个加到 $|H(u, v)|^2$ 的所有项上的特定常数。下面的几个例子说明了这一表达式的应用。

例 5.12 逆滤波和维纳滤波的比较。

图5.28说明了维纳滤波与直接逆滤波相比的优点。图5.28(a)是图5.27(a)的全逆滤波的结果。类似地, 图5.28(b)是图5.27(c)的半径受限的逆滤波结果。为便于比较, 这里重新列出了这些图像。图5.28(c)显示了使用式(5.8-6)通过例5.11中使用的退化函数得到的结果。 K 值的交互式选择是为了找到最好的视觉效果。在这个例子中, 与直接逆滤波方法相比, 维纳滤波的效果显然更好。比较图5.25(a)和图5.28(c), 我们会发现维纳滤波的结果非常接近原图像的外观。

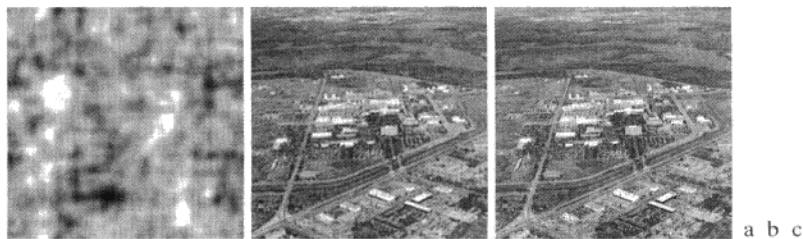


图 5.28 逆滤波和维纳滤波的比较: (a) 图 5.25 (b) 的全逆滤波结果; (b) 半径受限的逆滤波结果; (c) 维纳滤波的结果

例 5.13 维纳滤波的进一步比较。

图5.29 的第一行从左到右分别显示了被均值为零、方差为 650 的加性高斯噪声严重污染的图5.26(b)的模糊图像, 直接逆滤波的结果, 以及维纳滤波的结果。用式(5.8-6)的维纳滤波, 通过例5.10的 $H(u, v)$

和交互地选择 K , 可以得到最好的视觉效果。正如所期望的那样, 逆滤波产生了一幅不太适用的图像。注意, 逆滤波后的图像中的噪声非常强, 以至于它的结构就在去模糊滤波器的方向上。维纳滤波的结果并不完美, 但它的确给了我们一些关于图像内容的线索。要辨认图中的文字, 还是有点难度。

图 5.29 的第二行显示了同样的序列, 但噪声方差的水平降低了一个数量级。这种降低对逆滤波没有多少影响, 但维纳滤波的效果明显改进了, 图中的文字容易辨认多了。图 5.29 的第三行相对于第一行噪声方差降低了 5 个数量级。事实上, 图 5.29 (g) 中的图像已没有可见的噪声。在这种情况下, 逆滤波的结果相当有趣。噪声仍很明显, 但是文字能通过噪声“窗帘”看见。这是关于式 (5.7-2) 的一个很好的例子。换句话说, 正如从图 5.29 (h) 可明显看到的那样, 逆滤波消除图像模糊的能力是很强的。然而, 噪声还是支配着结果。即使我们能看到图 5.29 (b) 和图 5.29 (e) 中噪声背后的内容, 但字符还是显得有点模糊。图 5.29 (i) 中的维纳滤波结果是最好的, 视觉上非常接近于图 5.29 (a) 中的原图像。只要退化函数的合理估计是可用的, 这些类型的结果就是使用维纳滤波可能得到的结果。

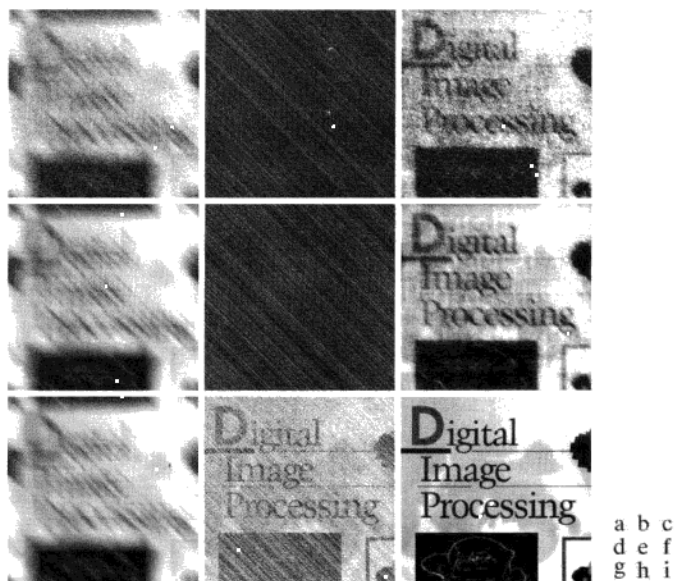


图 5.29 (a) 由运动模糊和加性噪声污染的 8 比特图像; (b) 逆滤波的结果; (c) 维纳滤波的结果; (d)~(f) 同样的图像序列, 但噪声方差降低了一个数量级; (g)~(i) 同样的图像序列, 但噪声方差比图 (a) 中的噪声方差降低了 5 个数量级。注意图 (h) 去模糊图像透过噪声“窗帘”清晰可见

5.9 约束最小二乘方滤波

关于退化函数 H 的某些知识必须已知的问题, 对于本章讨论的所有方法是很常见的。然而, 维纳滤波却存在一些其他的困难: 未退化图像和噪声的功率谱必须是已知的。在前面的章节中已显示出, 使用式 (5.8-6) 给出的近似方法能得到很好的结果。然而, 功率谱比的常数估计并不总是一个合适的解。

本节讨论的方法仅要求噪声方差和均值的知识。正如 5.2.4 节讨论的那样, 这些参数通常可从一幅给定的退化图像计算出来, 因此这是一个很重要的优点。另一个不同是, 维纳滤波建立在最小化统计准则的基础之上, 因此在平均意义上它是最优的。本节给出的算法具有显著的特点, 即对于其应用到的每一幅图像都能产生最优结果, 当然, 这些理论上满足的最优准则与动态的视觉感知并没有关系。因此, 算法的选择往往由结果图像的视觉感知质量决定 (至少部分是这样的)。

通过使用式(4.6-23)给出的卷积定义,并像 2.6.6 节解释的那样,我们可将式(5.5-16)表达为如下向量-矩阵形式:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta} \quad (5.9-1)$$

 关于向量和矩阵的简要回顾,请查阅本书的网站。

例如,假设 $g(x, y)$ 的大小为 $M \times N$ 。然后,我们可以使用 $g(x, y)$ 的第一行中的图像元素构成向量 $\mathbf{g}$ 的第一组 N 个元素,从第二行构成下一组 N 个元素,依此类推。结果向量将有 $MN \times 1$ 维。这也同样是 $\mathbf{f}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的维数,因为这些向量是以同样的方式构成的。矩阵 $\mathbf{H}$ 有 $MN \times MN$ 维,其元素由式(4.6-23)中的卷积元给出。

把图像复原问题简化为简单的矩阵操作的结论看起来很合理。遗憾的是,事实上并非如此。例如,假设我们正在处理一幅中等大小的图像,譬如大小为 $M = N = 512$,那么式(5.9-1)中的向量为 $262\,144 \times 1$ 维,矩阵 $\mathbf{H}$ 为 $262\,144 \times 262\,144$ 维。计算这种大小的向量和矩阵并不是一件简单的任务。由于 $\mathbf{H}$ 对噪声高度敏感,因此问题被进一步复杂化(在前面两节中我们已了解到噪声的影响,因此对此不应感到奇怪)。然而,明确地以矩阵形式来表达复原问题确实可以简化复原技术的推导。

尽管我们不能完全推导已存在的约束最小二乘法,但这种方法在矩阵表示法中的确有它的根源。在本章的最后会给出参考资料,涵盖详细推导的来源。该方法的核心是 $\mathbf{H}$ 对噪声的敏感性问题。减少噪声敏感性问题的一种方法是以平滑度量的最佳复原为基础的,如一幅图像的二阶导数(“拉普拉斯变换”这位“老朋友”)。意味深长的是,必须用手边问题的参数来约束复原。因此,我们的期望是找一个最小准则函数 C ,定义如下:

 使用代数技术来进行图像复原的整章内容,请查阅本书网站上的 Tutorials 部分。

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2 \quad (5.9-2)$$

其约束为

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \quad (5.9-3)$$

其中, $\|\mathbf{w}\|^2 \triangleq \mathbf{w}^T \mathbf{w}$ 是欧几里得向量范数^①, $\hat{\mathbf{f}}$ 是未退化图像的估计。拉普拉斯算子 ∇^2 在式(3.6-3)中定义过。

这个最佳化问题在频率域中的解决由下面的表达式给出:

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v) \quad (5.9-4)$$

其中, γ 是一个参数,必须对它进行调整以满足式(5.9-3)的条件, $P(u, v)$ 是函数

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9-5)$$

的傅里叶变换。在 3.6.2 节中介绍拉普拉斯算子时我们曾见过这个函数。如早些时候注意到的那样,记住, $p(x, y)$ 和所有其他相关的空间域函数很重要,在用式(5.9-4)计算其傅里叶变换之前要用零进行适当的填充,正如 4.6.6 节所讨论的那样。注意,当 γ 为 0 时,式(5.9-4)简化为逆滤波。

① 回忆可知,对于有着 n 个元素的向量 $\mathbf{w}$,有 $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n w_k^2$,其中 w_k 是 $\mathbf{w}$ 的第 k 个元素。

例 5.14 维纳滤波和最小二乘方滤波的比较。

图 5.30 显示了使用约束最小二乘方滤波处理图 5.29(a)、图 5.29(d) 和图 5.29(g) 的结果, 为产生最好的视觉效果, γ 的值是手工选择的。使用同样的过程, 产生的维纳滤波结果如图 5.29(c)、图 5.29(f) 和图 5.29(i) 所示。比较约束最小二乘方滤波和维纳滤波的结果, 发现前者对于高噪声和中等噪声的情况, 产生的结果要稍好一些, 而对于低噪声情况, 两种滤波产生基本相等的结果。当手工选择参数以取得更好的视觉效果时, 约束最小二乘方滤波的效果有可能比维纳滤波的效果更好。式 (5.9-4) 中的参数 γ 是一个标量, 而式 (5.8-6) 中的 K 值是两个未知频率域函数的近似比, 该比值很少是常数。因此, 手工选择 γ 将得出未退化图像的更为准确的估计。



图 5.30 约束最小二乘方滤波的结果。请将图 5.29(c)、图 5.29(f) 和图 5.29(i) 所示的维纳滤波结果分别与图(a)、图(b)和图(c)比较

如前面的例子所示, 交互地调整参数 γ 达到可接受的结果是可能的。然而, 如果我们对最优化感兴趣, 那么就必须调整参数 γ 以满足式 (5.9-3) 中的约束条件。迭代计算 γ 的过程如下。

定义一个“残差”向量 $\mathbf{r}$ 为

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} - H\hat{\mathbf{f}} \quad (5.9-6)$$

因为, 由式 (5.9-4) 的解可知, $\hat{\mathbf{f}}(u, v)$ (即隐含的 $\hat{\mathbf{f}}$) 是 γ 的函数, 所以 $\mathbf{r}$ 也是该参数的函数。可以证明 (Hunt[1973])

$$\phi(\gamma) = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|^2 \quad (5.9-7)$$

是 γ 的单调递增函数。我们要做的是调整 γ 使得

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a \quad (5.9-8)$$

其中, a 是一个精确度因子。在式 (5.9-6) 看来, 如果 $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$, 那么式 (5.9-3) 的约束就严格满足了。因为 $\phi(\gamma)$ 是单调的, 所以寻找满足要求的 γ 值并不困难。一种方法是

1. 指定 γ 的一个初始值。
2. 计算 $\|\mathbf{r}\|^2$ 。
3. 若满足式 (5.9-8), 则停止; 否则, 若 $\|\mathbf{r}\|^2 < \|\boldsymbol{\eta}\|^2 - a$, 则增大 γ , 若 $\|\mathbf{r}\|^2 > \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + a$, 则减小 γ , 然后返回步骤 2。使用 γ 的新值, 通过式 (5.9-4) 重新计算最佳估计 $\hat{\mathbf{f}}(u, v)$ 。

其他的方法, 譬如牛顿-拉弗森算法, 也可用于改进收敛的速度。

为了使用这一算法, 我们需要 $\|\mathbf{r}\|^2$ 和 $\|\boldsymbol{\eta}\|^2$ 的值。为了计算 $\|\mathbf{r}\|^2$, 由式 (5.9-6) 得

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{G}(u, v) - H(u, v)\hat{\mathbf{F}}(u, v) \quad (5.9-9)$$

由此, 我们可以通过计算 $\mathbf{R}(u, v)$ 的傅里叶反变换得到 $\mathbf{r}(x, y)$ 。然后有

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} r^2(x, y) \quad (5.9-10)$$

计算 $\|\eta\|^2$ 可以得出一个重要的结果。首先,考虑整幅图像上的噪声方差,该方差可以使用取样平均的方法来估计,如3.3.4节讨论的那样:

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_\eta]^2 \quad (5.9-11)$$

其中,

$$m_\eta = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y) \quad (5.9-12)$$

是样本均值。参考式(5.9-10)的形式,我们注意到式(5.9-11)中的双重求和等于 $\|\eta\|^2$ 。这就给出了如下表达式:

$$\|\eta\|^2 = MN [\sigma_\eta^2 + m_\eta^2] \quad (5.9-13)$$

这是非常有用的结果。它告诉我们,仅仅用噪声均值和方差的知识我们就可以实现一个最佳复原算法。这些值并不难估计(见5.2.4节),但要假设噪声和图像灰度值不相关。这是本章讨论的所有方法的一个基本假设。

例 5.15 最佳约束最小二乘方滤波的迭代估计。

图5.31(a)显示了使用刚才描述的算法来估计用于复原图5.25(b)的最佳滤波得到的结果。 γ 的初始值是 10^{-5} ,调整 γ 的校正因子是 10^{-6} , a 的值为0.25。用于生成图5.25(a)的指定噪声参数相同:噪声方差为 10^{-5} ,均值为0。复原结果几乎与图5.28(c)一样好,图5.28(c)是由维纳滤波得到的结果,为得到最好的视觉效果,手工指定了 K 值。图5.31(b)显示了使用噪声参数的错误估计值时发生的情况。在这种情况下,指定的噪声方差为 10^{-2} ,并且均值保留为0。在这种情况下,结果有相当大的模糊。

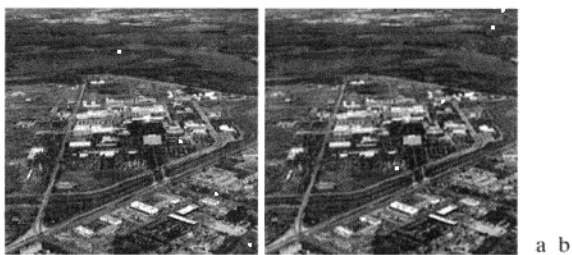


图 5.31 (a)对图5.16(b)使用正确的噪声参数迭代确定的约束最小二乘方复原;(b)使用错误的噪声参数得到的结果

正如本节开始指出的那样,约束最小二乘方意义下的最佳复原在视觉效果上并不意味着最好。根据退化和噪声的性质及大小,算法中交互确定最佳估计的其他参数,在最终结果中也起着很重要的作用。通常,自动确定的复原滤波器比人为调整滤波器参数的复原结果要差。特别是约束最小二乘方滤波器完全由单一的标量参数来决定时更是如此。

5.10 几何均值滤波

可对5.8节中讨论的维纳滤波器稍加推广。这种推广就是所谓的几何均值滤波器的形式:

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^\alpha \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \beta \left[\frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)} \right]} \right]^{1-\alpha} G(u, v) \quad (5.10-1)$$

其中, α 和 β 是正的实常数。几何均值滤波器由两个括号内的幂次分别为 α 和 $1-\alpha$ 的表达式组成。

当 $\alpha = 1$ 时,该滤波器退化为逆滤波器;当 $\alpha = 0$ 时,该滤波器变为所谓的参数维纳滤波器,参数维纳滤波器在 $\beta = 1$ 时还原为标准的维纳滤波器。如果 $\alpha = 1/2$,则滤波器变成相同幂次的两个量的积,这是几何均值的定义,这样就给出了这种滤波器的命名。当 $\beta = 1$ 时,随着 α 减小到 $1/2$ 以下,滤波器的性能越来越接近逆滤波器。类似地,当 α 增大到 $1/2$ 以上时,滤波器更接近维纳滤波器。当 $\alpha = 1/2$ 且 $\beta = 1$ 时,该滤波器通常也称为谱均衡滤波器。式(5.10-1)在实现复原滤波时非常有用,因为它表示了合并为单个表达式的滤波器族。

5.11 由投影重建图像

在本章的前几节中,我们讨论了各种复原退化图像的技术。在这一节,我们研究从一系列投影重建一幅图像的问题,集中讨论 X 射线计算机断层(CT)。这是最早且应用最广泛的 CT 类型,也是当前数字图像处理在医学中的主要应用之一。

如第 1 章注释的那样,通常也用术语计算机轴向断层术(CAT)来表示 CT。

5.11.1 引言

重建问题在原理上很简单,并且可以直接用直观的定性方法加以描述。首先,考虑图 5.32(a),它由均匀背景上的单一物体组成。它的物理意义可解释如下:假设该图像是人体三维区域的一个横断面。还假设图像中的背景表示均匀的软组织,它所环绕的物体是一个肿瘤,该肿瘤也是均匀的,但有较高的吸收特性。

接着,如图 5.32(a)所示,假设我们用一束细的、平行的 X 射线从左到右扫描(通过图像平面),并且假设物体吸收的射线束能量比背景吸收的射线束能量多,这是典型的情况。利用放在该区域另一端的 X 射线吸收检测器将产生所示的信号(吸收断面图)。该信号的幅度(亮度)与吸收成正比^①。我们能够观察到信号中的任意一点都是所穿过的相应空间点的该射线束中单一射线吸收值的和(这样的和通常称为射线和)。这时,有关物体的所有信息就是这个一维的吸收信号。

由单个投影,我们无法确定沿着射线路径处理的是单个物体还是多个物体,但我们可以仅基于这一信息来创造一幅图像的方法开始重建。如图 5.32(b)所示,该方法沿着射线来的方向把一维信号反投影回去。穿过二维区域的一维信号的反投影过程有时可想象为把投影穿过该区域反“涂抹”回去。在数字图像中,这意味着沿垂直于射线方向复制横穿图像的相同的一维信号。例如,图 5.32(b)就是由复制矩形图像的所有列中的一维信号创建的。显然,刚刚描述的方法就称为反投影法。

接着,假设我们把源-检测器对的位置旋转 90° ,如图 5.32(c)所示。重复前段解释的步骤,在垂直方向生成一幅反投影图像,如图 5.32(d)所示。我们把这一结果加到前边的反投影图像上继续重建工作,结果如图 5.32(e)所示。现在,我们可以说我们感兴趣的物体已包含在所示的方形中了,其幅度是单个投影幅度的两倍。稍加思考后,就会了解使用刚刚讨论的方法得到更多的视图,我们应能得到关于物体形状的更多信息。事实上,如图 5.33 所示,所发生的情况说明这是正确的。随着投影数量的增加,不相交反投影的强度相对于多个反投影相交区域的强度将降低。最终结果是,较亮区域将支配结果,当为显示而调节亮度时,很少或没有相交的反投影将减弱为背景。

由 32 个投影形成的图 5.33(f)说明了这一概念。然而,应注意,尽管这幅重建的图像是对原始物体形状的较好近似,但该图像却被“晕环”效应所模糊,关于该信息可在图 5.33 中渐进的步骤中看到。

^① 关于 X 射线源和检测器的物理知识超出了我们探讨的范围,我们的讨论主要是 CT 的图像处理。关于 X 射线图像形成的物理原理,请参阅 Prince and Links[2006]。

例如, 图 5.33(e) 中“晕环”以星状形式出现, 其亮度比物体低, 但又比背景高。当视图数目增加时, “晕环”的形状变成一个圆, 如图 5.33(f) 所示。在 CT 重建中, 模糊是一个重要问题, 其解决办法将在 5.11.5 节讨论。最后, 从图 5.32 和图 5.33 的讨论, 我们得出结论: 相隔 180° 的投影互为镜像图像, 因此, 为了产生重建所要求的所有投影, 我们只要按圆周的一半角度增量来考虑就可以了。

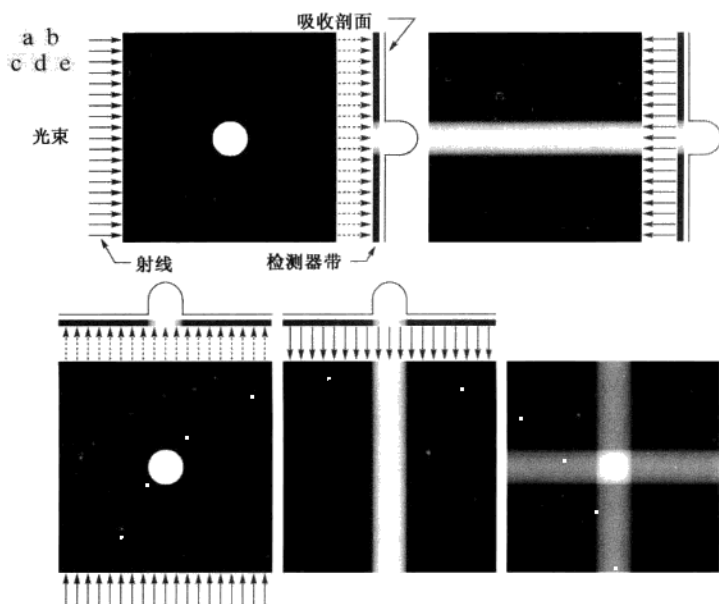


图 5.32 (a) 显示一个简单物体的平坦区域, 一个输入的平行射线束, 一个检测器带; (b) 感知条带数据的反投影的结果 (即一维吸收剖面); (c) 旋转 90° 后的射线束和检测器; (d) 反投影; (e) 图 (b) 和图 (d) 的和。反投影相交处的亮度是各个反投影的亮度的两倍

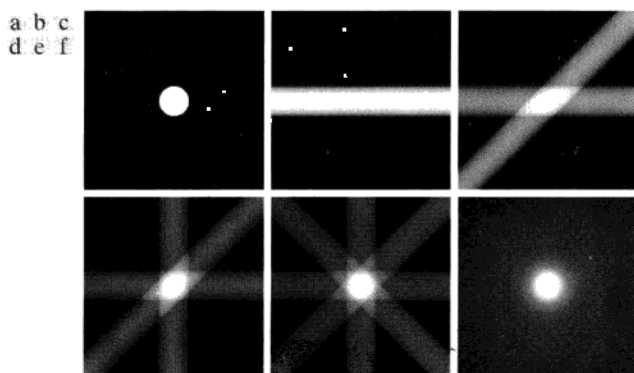


图 5.33 (a) 与图 5.32(a) 相同的图像; (b)~(e) 使用间隔为 45° 的 1、2、3、4 个反投影的重建; (f) 间隔 5.625° 的 32 个反投影的重建 (注意模糊效果)

例 5.16 包含两个物体的简单平面的反投影。

图 5.34 说明了稍微复杂一些的区域反投影法重建, 该区域包含两个具有不同吸收特性的物体。图 5.34(b) 显示了用一个反投影的结果。我们注意到该图的三个主要特性, 从下到上: 一个细的水平灰色带与小物体还不能最后断定的部分相对应; 在它上边较亮的条带 (吸收更多) 对应于由两个物体共享的区域; 以及对应于椭圆物体剩余部分的上边的条带。图 5.34(c) 和图 5.34(d) 分别显示了使用相隔 90° 的两个投影

和相隔 45° 的 4 个投影的重建。这些图形的解释类似于对图 5.33(c) 到图 5.33(e) 的讨论。图 5.34(e) 和(f) 显示了分别使用 32 个和 64 个反投影的更精确的重建。这两个结果在视觉上非常接近, 而且两者都显示了之前提到的模糊问题, 模糊问题的解决办法将在 5.11.5 节中讨论。

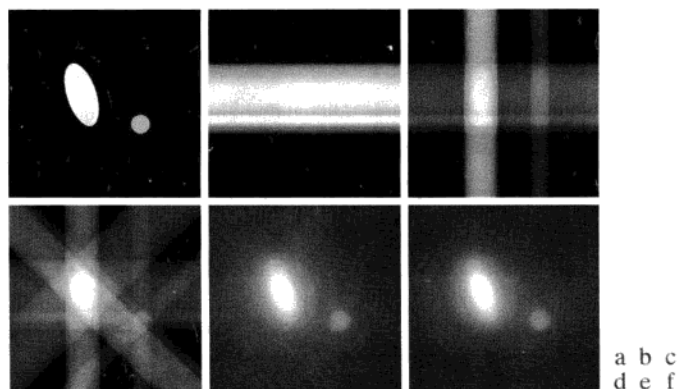


图 5.34 (a) 有两个物体的区域; (b)~(d) 用相隔 90° 的 1、2 和相隔 45° 的 4 个反投影的重建; (e) 用相隔 5.625° 的 32 个反投影的重建; (f) 用相隔 2.8125° 的 64 个反投影的重建

5.11.2 计算机断层(CT)原理

X 射线计算机断层的目的是使用 X 射线从许多不同的方向穿过物体而得到该物体内部结构的三维描述。传统的胸部 X 射线透视是把物体放在对 X 射线敏感的平板对面, 并用圆锥形 X 射线束照射该个体得到的。X 射线平板产生一幅图像, 该图像上一个点的亮度与 X 射线通过该物体后照射到该点上的 X 射线能量成正比。这幅图像就是在前节中我们讨论过的投影的二维图像。我们可以对整幅图像进行反投影, 并创建一个三维物体。通过在许多角度重复该过程, 并把反投影相加, 就可产生胸腔结构的三维再现。计算机断层通过身体产生的切片试图得到相同的信息(或者其局部)。一个三维描述可以用堆积这些切片得到。CT 的实现要经济得多, 因为得到高分辨率切片所需要的检测器数量要比产生相同分辨率的一个完整二维投影所需要的检测器数量少得多。计算负担和 X 射线的剂量同样要降低, 使得一维投影 CT 成为一种更实际的方法。

如上一章中讨论傅里叶变换时那样, CT 所要求的基本数学概念在数字计算机能够实用之前已存在很多年了。CT 的理论基础可追溯至来自维也纳的数学家约翰·雷登, 作为其线积分工作的一部分, 他于 1917 年推导了一种沿着平行射线对一个二维物体投影的方法。现在, 该方法就是通常所指的雷登变换, 这是下一节中我们讨论的话题。45 年后, 埃兰·M·考玛克(Allan M. Cormack)——Tufts 大学的物理学者部分地重新发现了这些概念, 并把它们应用到 CT 上。考玛克在 1963 年和 1964 年发表了他的最初发现, 并且说明了如何从不同角度方向得到的 X 射线图像重建人体横截面图像。他给出了重建所需要的数学公式, 并且构建了一个用于展示其概念的实际 CT 原型。作为独立的工作, 位于伦敦的 EMI 公司的电子工程师高德弗里·N·豪斯菲尔德(Godfrey N. Hounsfield)及其同事们明确地表达了类似的解决方法, 并建立了第一台医学 CT 机。由于他们对医学断层的贡献, 考玛克和豪斯菲尔德共同获得了 1979 年诺贝尔医学奖。

第一代(G1)CT 扫描仪采用“铅笔”型 X 射线束和一个单检测器, 如图 5.35(a) 所示。对于一个给定的旋转角度, 源/检测器对沿着所示的线性方向增量式地平移。投影(类似于图 5.32)由测量每一个增量平移处检测器的输出产生。完成了线性平移之后, 旋转源/检测器组合, 并重复该过程以产生在不同角度上的另一个投影。该过程在 0° 到 180° 内对所有期望的角度重复, 以生成一组完整的投影,

就像前一节解释的那样,用反投影产生一幅图像。物体顶部的十字标记表明与源/检测器对构成的平面相垂直的方向的运动。通过增量地将物体移过源/检测器平面(每完成一次扫描后),产生一组横截面图像(切片)。堆积这些图像就可生成人体截面的三维体。医学成像的第一代扫描仪不久就不再制造了,但由于它们可产生平行的射线束(如图5.32所示),它们的几何学原理作为介绍CT成像的基础是有优势的。正如下一节要讨论的那样,该几何学原理是推导由投影实现图像重建所需公式的起点。

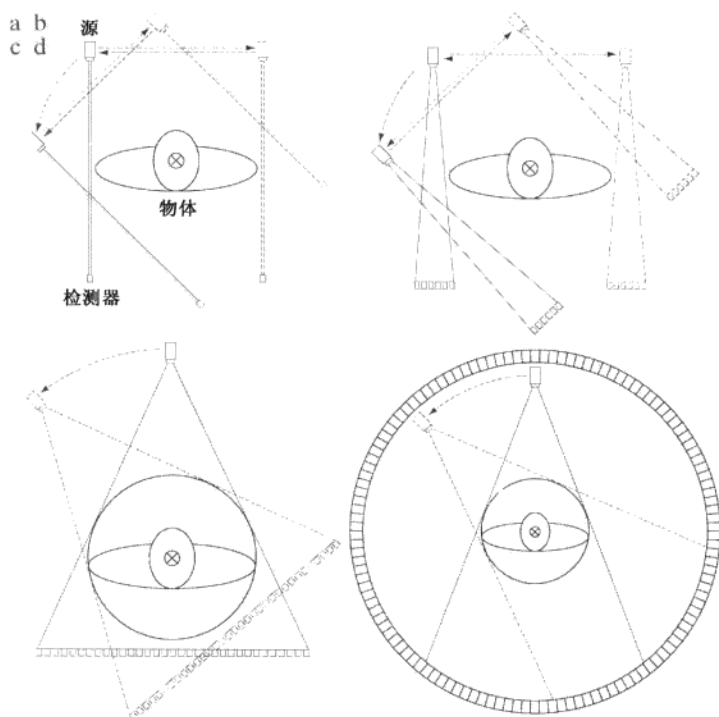


图 5.35 四代 CT 扫描器。点箭头直线表示增量线性运动。点箭头弧线表示增量旋转。物体顶部的十字标记表示垂直于纸面的线性运动。图(a)和图(b)中的双箭头表示源/检测器单元被平移后又回到了其原始位置

第二代(G2)CT 扫描器[见图 5.35(b)]与第一代扫描器以相同的原理工作,但所用的射线束是扇形的。这就允许使用多个检测器,因而源/检测器对的平移较少。第三代(G3)扫描器较早期的前两代CT在几何原理上有较大的改进。如图5.35(c)所示,G3扫描器使用足够长的一族检测器(约有1000个独立的检测器)来覆盖一个更宽射线束的整个视野。因此,每个角度的增量都会产生一个完整的投影,从而消除了如G1和G2扫描器那样对源/检测器对的平移的需要。第四代(G4)扫描器更进一步。它使用一个圆环检测器(约有5000个独立的检测器),仅仅射线源做旋转。G3和G4扫描器的重要优点是速度快,主要缺点是造价高和较大的X射线散射,它要比G1和G2扫描器更高的剂量才能达到可比拟的信噪比特性。

新的扫描模式正在开始使用。例如,第五代(G5)CT扫描器,即所知道的电子束计算机断层(EBCT)扫描器,该扫描器排除了所有的机械运动,而使用电磁控制电子束。通过触发环绕着病人的钨极板,这些电子束产生X射线,然后X射线被整形为通过病人的扇形射线束,并激发如G4扫描器那样的检测器环。

传统方法得到的CT图像在扫描期间要求病人保持稳定,以产生一幅图像。然后,病人在垂直于成像平面上用机动工作台递增移动位置的时候扫描停止。再后,得到下一幅图像;重复该过程多次,

直到覆盖人体一个特定的截面所要求的数量为止。虽然在不足一秒钟就可以得到一幅图像,但在图像获取期间有要求病人屏住呼吸的过程(如腹部和胸部扫描)。完成 30 幅图像的采集过程可能需要几分钟时间。针对该问题所用的一种方法是螺旋 CT,有时也称为第六代(G6)CT。在该方法中,G3 和 G4 扫描器使用一种所谓的滑动环来配置,它不需要在源/检测器和处理单元之间的电气和信号连接。然后,源/检测器对连续旋转 360° ,同时病人在垂直于扫描的方向恒速移动。结果是连续的螺旋数值,这些数据经处理后就得到各幅切片图像。

第七代(G7)扫描器(也称为多切片 CT 扫描器)将要问世,这种扫描器使用“厚”的扇形射线束与平行检测器族相配合同时收集体 CT 数据,即三维横截“厚片层”,而不是每个 X 射线脉冲产生单一的横截面图像。除了有效地增加了细节之外,这种方法的优点是它使用的 X 射线管更经济,从而降低了成本并降低了剂量。

在下一节开始,为系统阐述图像投影,我们将推导一些必要的数学工具和重建算法。我们的关注点是图像处理的基本原理,它是我们刚刚讨论过的所有 CT 方法的支撑。与 CT 系统有关的机械和源/检测器特性相关的信息,在本章末尾引用的参考文献中提供。

5.11.3 投影和雷登变换

下面,我们详细推导根据 X 射线计算机断层重建图像所需要的数学问题,但是,相同的基本原理在其他 CT 成像模式也可用,如 SPECT(单电子发射断层)、PET(正电子发射断层)、MRI(核磁共振成像)和超声成像的某些模式。

在笛卡儿坐标系中一条直线可以完全由它的斜截式来描述, $y = ax + b$, 或可由其法线表示来描述,如图 5.36 所示:

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho \quad (5.11-1)$$

平行射线束的投影可由一组直线建模,如图 5.37 所示。投影信号中的任意一点由沿着直线 $x \cos \theta_k + y \sin \theta_k = \rho_j$ 的射线和给出。工作在连续变量情况下时,线求和变为线积分^①,由下式给出:

$$g(\rho_j, \theta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_j) dx dy \quad (5.11-2)$$

其中,我们使用了 4.5.1 节中讨论的冲激函数 δ 的性质。换句话说,除非 δ 的参量是零,否则式(5.11-2)的右边为零,它指出积分只沿着线 $x \cos \theta_k + y \sin \theta_k = \rho_j$ 计算。如果我们考虑 ρ 和 θ 的所有值,那么前一公式推广为

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \quad (5.11-3)$$

给出沿 xy 平面中任意一条线的 $f(x, y)$ 的投影(线积分)的公式就是前一节提到的雷登变换。符号 $\mathcal{R}\{f(x, y)\}$ 或 $\mathcal{R}\{f\}$ 有时用于代替式(5.11-3)中的 $g(\rho, \theta)$ 来表示 f 的雷登变换,但式(5.11-3)中所用的符号类型更为普遍。随后的讨论更明显,雷登变换是投影重建的基石,计算机断层是其在图像处理领域的主要应用。

在这一节中,我们遵从 CT 约定并将 xy 平面的原点放在中心位置而不是之前惯用的左上角位置(见 2.4.2 节)。但请注意,这两种坐标系均是右手坐标系,唯一的不同是我们的图像坐标系没有负轴。通过简单地移动原点,我们就可发现这种不同,因此两种表示是可互换的。

① 在第 4 章中,我们使用 (i, z) 来表示连续图像坐标,而用 (x, y) 来表示离散坐标。当时,这种区别很重要,因为我们在推导从连续到取样后的量的基本概念。在当前的讨论中,由于我们会在连续与离散坐标之间多次往返,坚持这种约定很可能会导致不必要的混淆。因此,为遵从已出版文献中的约定(见 Prince and Links[2006]),我们会根据上下文来确定坐标 (x, y) 是连续的还是离散的。当坐标是连续坐标时,我们会看到积分,而坐标为离散坐标时,会看到求和。

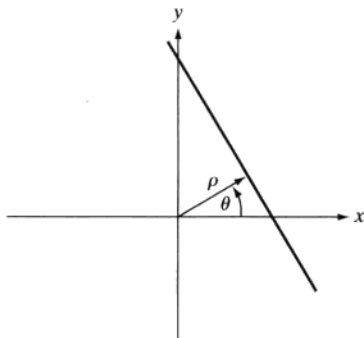


图 5.36 直线的法线表示

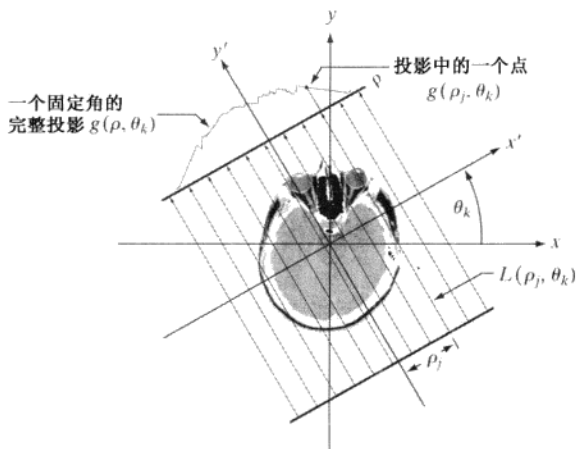


图 5.37 平行射线束的几何描述

在离散情况下, 式(5.11-3)变成

$$g(\rho, \theta) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) \quad (5.11-4)$$

其中, x, y, ρ, θ 现在是离散变量。如果固定 θ 而令 ρ 变化, 我们可以看到, (5.11-4) 简化为沿着由这两个参数的特定值定义的线对 $f(x, y)$ 的像素求和。(固定 θ 值的情况下) 通过增加覆盖图像 (θ 值固定) 所要求的 ρ 的所有值产生一个投影。改变 θ 并重复前述过程则产生另一个投影, 依次类推。这正好就是 5.11.1 节中生成投影的方法。

例 5.17 使用雷登变换得到圆形区域的投影。

在论述之前, 我们首先说明如何使用雷登变换得到图 5.38 (a) 中圆形物体投影的解析表达式:

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, A 是常数, r 是物体的半径。我们假设圆心位于 xy 平面的原点。因为物体是圆对称的, 其投影对所有角度都是一样的, 所以我们要做的全部事情就是得到 $\theta = 0^\circ$ 的投影。然后, 式(5.11-3)变成

$$\begin{aligned} g(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \rho) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, y) dy \end{aligned}$$

其中, 第二行来自公式(4.2-10)。正如之前注释的那样, 这是一个线积分(在这种情况下沿着线 $L(\rho, 0)$ 积分)。

还要注意的, 当 $|\rho| > r$ 时, $g(\rho, \theta) = 0$ 。当 $|\rho| \leq r$ 时, 积分从 $y = -\sqrt{r^2 - \rho^2}$ 到 $y = \sqrt{r^2 - \rho^2}$ 求值。因此,

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} f(\rho, y) dy = \int_{-\sqrt{r^2 - \rho^2}}^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} A dy$$

执行积分得到

$$g(\rho, \theta) = g(\rho) = \begin{cases} 2A\sqrt{r^2 - \rho^2}, & |\rho| \leq r \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, 我们利用了当 $|\rho| > r$ 时 $g(\rho, \theta) = 0$ 这样一个事实。图 5.38 (b) 显示了这一结果, 该结果与图 5.32 和图 5.33 中所说明的投影一致。注意, $g(\rho, \theta) = g(\rho)$, 即 g 是独立于 θ 的, 因为物体是关于原点对称的。

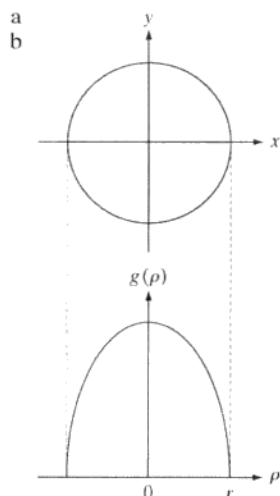


图 5.38 (a)一个圆盘；(b)该圆盘解析推导的雷登变换的曲线。这里我们可以画出该变换，因为它仅取决于一个变量。当 g 取决于 ρ 和 θ 时，雷登变换变成一幅图像，其坐标轴是 ρ 和 θ ，而一个像素的亮度与该像素位置处的 g 值成正比

当雷登变换 $g(\rho, \theta)$ 以 ρ 和 θ 作为直线坐标显示为一幅图像时，结果称之为正弦图(sinogram)，概念上类似于所显示的傅里叶谱[然而，不像傅里叶变换， $g(\rho, \theta)$ 总是一个实函数]。类似于傅里叶变换，正弦图包含重建 $f(x, y)$ 所需的数据。如同显示的傅里叶谱一样，正弦图对于简单区域很容易解释，但作为一个变得很复杂的投影区域去“读取”会变得很困难。例如，图 5.39(b) 是左侧矩形的正弦图，

为生成有着相同行数的阵列，正弦图中 ρ 轴的最小维对应于投影期间遇到的最大维。例如，使用 1° 增量得到的大小为 $M \times M$ 的方形的正弦图的最小尺寸为 $180 \times Q$ ，其中 Q 大于 $\sqrt{2}M$ 的最小整数。

其垂直轴和水平轴分别对应于 ρ 和 θ 。因此，底部一行是矩形在水平方向上的投影(即 $\theta = 0^\circ$)，中间一行是在垂直方向上的投影(即 $\theta = 90^\circ$)。底部一行的非零部分比中间一行的非零部分小这一事实告诉我们，物体在水平方向较窄。正弦图在两个方向上关于图像中心对称的事实告诉我们，处理的物体是对称的，并且平行于 x 轴和 y 轴。最后，正弦图是平滑的，这指出物体具有均匀的灰度。除了这些类型的一般观察外，关于正弦图我们说不出更多的特点。

图 5.39(c) 显示了一幅 Shepp-Logan 幻影图像，该图像是广泛使用的合成图像，设计用于模拟脑部主要区域的吸收，包括几个小的肿瘤。如图 5.39(d) 所示，解释这幅图像的正弦图更加困难。我们仍然可以推断某些对称的特点，但这是我们能够说明的全部内容。正弦图的视觉分析仅限于实际应用，但有时对于开发算法是有帮助的。

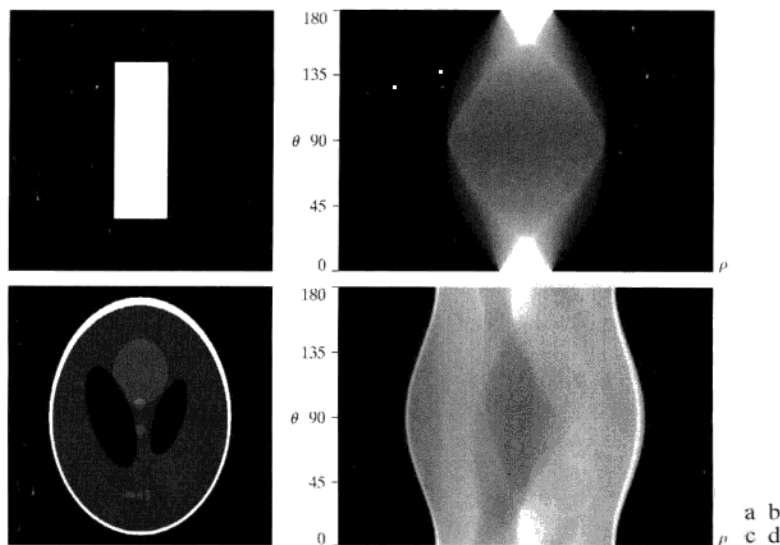


图 5.39 两幅图像和它们的正弦图(雷登变换)。正弦图的每一行是在垂直轴上沿相应角度的投影。图像(c)称为 Shepp-Logan 幻影。在其原始形式中，幻影的灰度非常低。为便于观察，这里显示的是增强后的图像

CT 的关键目的是从投影得到物体的三维表示。正如 5.11.1 节直观介绍的那样,其方法是反投影每一个投影,然后对反投影求和以产生一幅图像(切片)。堆积所有的结果图像产生三维物体的再现。为了得到来自雷登变换的反投影图像的形式化表达,让我们从单点开始, $g(\rho_j, \theta_k)$ 是全部投影 $g(\rho, \theta_k)$ 的一个固定旋转值 θ_k 的投影(见图 5.37)。由该单点的反投影形成的一幅图像的部分与将线 $L(\rho_j, \theta_k)$ 复制到图像上相比,没有更多的信息,其中线上每一点的值是 $g(\rho_j, \theta_k)$ 。对投影信号中的所有 ρ_j 值重复这一过程(保持 θ 值固定为 θ_k),可得到如下表达式:

$$f_{\theta_k}(x, y) = g(\rho, \theta_k) = g(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k, \theta_k)$$

对固定角度 θ_k 投影进行反投影所得到的图像示于图 5.32(b)。这一公式对于任意 θ_k 值均成立,因此我们一般可以把由角度 θ 处得到的单个反投影形成的图像写为

$$f_{\theta}(x, y) = g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \quad (5.11-5)$$

通过对所有的反投影图像积分,我们得到最终图像:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} f_{\theta}(x, y) d\theta \quad (5.11-6)$$

在离散情况下,积分变成对所有反投影图像求和:

$$f(x, y) = \sum_{\theta=0}^{\pi} f_{\theta}(x, y) \quad (5.11-7)$$

其中, x , y 和 θ 现在是离散值。回顾 5.11.1 节中的讨论,在 0° 和 180° 处的投影互为镜像图像,因此求和执行最后的角度增量在 180° 之前。例如,如果使用 0.5° 的增量,则求和操作是从 0° 到 179.5° 以半度为增量。用刚刚讨论的方法形成的反投影图像有时称为层图(laminogram)。可以隐含地将层图理解为仅仅是对产生投影的图像的一个近似,下面的例子将清楚地解释这一事实。

例 5.18 从正弦图得到反投影图像。

式(5.11-7)用于从式(5.11-4)得到的投影产生图 5.32 到图 5.34 的反投影图像。类似地,这些公式用于产生图 5.40(a)和图 5.40(b),它们分别显示了对应于图 5.39(b)和图 5.39(d)中正弦图的反投影图像。如之前的图那样,我们注意到很严重的模糊,因此很明显,直接运用式(5.11-4)和式(5.11-7)将得到不可接受的结果。然而,就像您在 5.11.5 节中看到的那样,用重新表达反投影方法在重建中做有意义的改善是可能的。

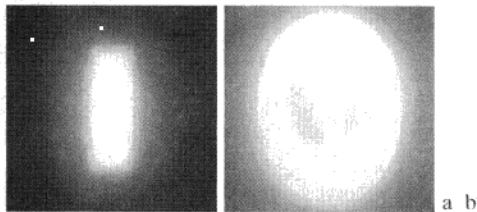


图 5.40 图 5.39 中的正弦图的反投影

5.11.4 傅里叶切片定理

在这一节,我们将推导与投影的一维傅里叶变换和得到投影区域的二维傅里叶变换相关的基本结果。这一关系是能处理刚才讨论的模糊问题的重建方法的基础。

关于 ρ 投影的一维傅里叶变换为

$$G(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\rho, \theta) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \quad (5.11-8)$$

其中,如式(4.2-16), ω 是频率变量,很容易理解,该表达式是给定 θ 值的。用式(5.11-3)代替

$g(\rho, \theta)$, 得到表达式

$$\begin{aligned} G(\omega, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} dx dy d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \right] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \end{aligned} \quad (5.11-9)$$

其中, 最后一步遵循本节早些时候提到过的冲激特性。令 $u = \omega \cos \theta$ 和 $v = \omega \sin \theta$, 式(5.11-9)变为

$$G(\omega, \theta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right]_{u=\omega \cos \theta, v=\omega \sin \theta} \quad (5.11-10)$$

我们可看出该表达式与指定 u 值和 v 值时 $f(x, y)$ [见式(4.5-7)] 的二维傅里叶变换等价, 即

$$G(\omega, \theta) = [F(u, v)]_{u=\omega \cos \theta, v=\omega \sin \theta} = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \quad (5.11-11)$$

其中, 通常, $F(u, v)$ 表示 $f(x, y)$ 的二维傅里叶变换。

式(5.11-11)就是众所周知的傅里叶切片定理(或投影切片定理)。它说明一个投影的傅里叶变换是得到投影区域的二维傅里叶变换的一个切片。该术语的来源可用图 5.41 来解释。正如该图所示, 任意一个投影的一维傅里叶变换可以沿着一个角度提取一条线的 $F(u, v)$ 的值来得到, 该角度是产生投影所用的角度。在原理上, 我们可以简单地使用 $F(u, v)$ 的傅里叶反变换得到 $f(x, y)$ ^①, 然而, 这是高代价的计算, 因为它涉及二维变换的反变换。在下一节中讨论的方法将有效得多。

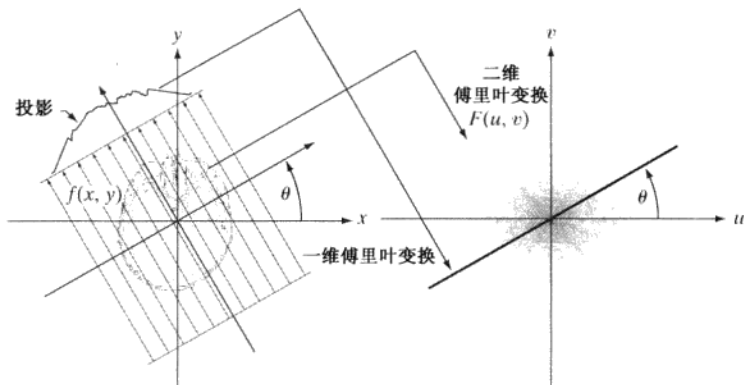


图 5.41 傅里叶切片定理的说明。投影的一维傅里叶变换是得到投影的区域的二维傅里叶变换的一个切片。注意角度 θ 的对应

5.11.5 使用平行射线束滤波反投影的重建

如我们在 5.11.1 节和例 5.18 所看到的那样, 直接得到反投影会生成不可接受的模糊结果。幸运的是, 有一个简单的解决该问题的办法, 就是在计算反投影之前对投影做简单的滤波。从式(4.5-8)可知, $F(u, v)$ 的二维反傅里叶变换是

① 记住, 即使使用了傅里叶反变换, 恢复的图像中仍会存在模糊, 因为该结果等同于使用前一节讨论的方法得到的结果。

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (5.11-12)$$

如式(5.11-10)和式(5.11-11)所示, 如果令 $u = \omega \cos \theta$ 和 $v = \omega \sin \theta$, 则微分变为 $du dv = \omega d\omega d\theta$, 我们可以把式(5.11-12)表达为极坐标形式

$du dv = \omega d\omega d\theta$ 这一关系源自基本积分学, 在基本积分学中, 雅可比矩阵是各变量变化的基础。

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (5.11-13)$$

然后, 利用傅里叶切片定理有

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (5.11-14)$$

把积分分离为两个表达式, 一个 θ 的范围为 0° 到 180° , 另一范围为 180° 到 360° , 并利用 $G(\omega, \theta + 180^\circ) = G(-\omega, \theta)$ 这一事实(见习题 5.32), 我们可以把式(5.11-14)表达为

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta \quad (5.11-15)$$

考虑关于 ω 的积分项, 从式(5.11-1)我们可以看出, 如 ρ 那样, $x \cos \theta + y \sin \theta$ 是常数。因此, 式(5.11-15)可写为

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega\rho} d\omega \right]_{\rho=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \quad (5.11-16)$$

方括号内部的表达式是一维傅里叶反变换形式 [见式(4.2-17)], 附加了一个 $|\omega|$ 项, 基于 4.7 节的讨论, 我们可以看出它是一个一维滤波函数。显然, $|\omega|$ 是一个斜坡滤波器 [见图 5.42(a)]^①。这个函数是不可积的, 因为其幅度在两个方向上都扩展到 $+\infty$, 所以其傅里叶反变换没有定义。理论上, 可用某种方法来处理该问题, 如使用所谓的广义 δ 函数。实践中, 该方法是对斜坡加窗, 使它在定义的频率范围之外为零, 也就是加窗限制带宽的斜坡滤波器。

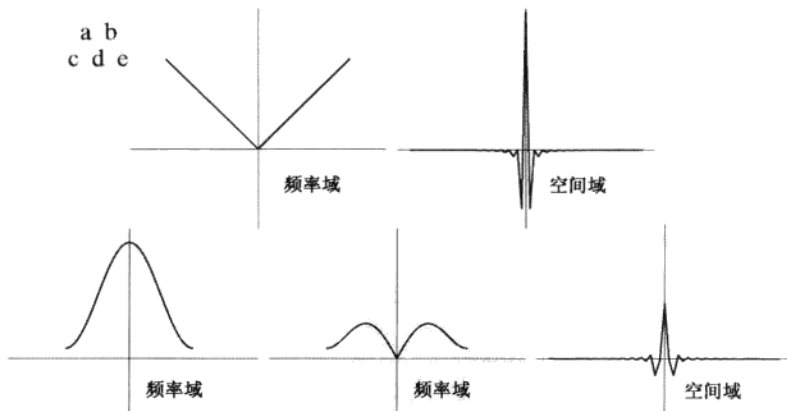


图 5.42 (a) 使用一个盒状滤波器限制带宽后的滤波器 $|\omega|$ 的频率域剖面线; (b) 空间域表示; (c) 汉明窗函数; (d) 由图(a)和图(c)的乘积形成的加窗后的斜坡滤波器; (e) 乘积的空间域表示(注意振铃的降低)

限制一个函数的带宽的最简方法是在频率域中使用一个盒子。然而, 正如我们在图 4.4 中看到的那样, 一个盒子有不希望的振铃特性, 因此, 用一个平滑窗来代替。图 5.42(a) 显示了使用一个盒状

① 斜坡滤波器通常称为 Ram-Lak 滤波器, 因为该滤波器是由 Ramachandran and Lakshminarayanan[1971]首次提出的。

窗限制带宽后的一个斜坡滤波器,图 5.42(b)显示了通过计算该滤波器的傅里叶反变换得到的空间域表示。如预期的那样,加窗滤波的结果在空间域中呈现出了明显的振铃。我们由第 4 章可知,频率域的滤波等于空间域的卷积,因此,使用存在振铃的函数进行空间滤波也将产生被振铃污染的结果。使用一个平滑函数加窗对这一情况有帮助。常常用于实现一维 FFT 的 M 点离散窗函数由下式给出:

$$h(\omega) = \begin{cases} c + (c-1)\cos\frac{2\pi\omega}{M-1}, & 0 \leq \omega \leq (M-1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.11-17)$$

当 $c = 0.54$ 时,该函数称为汉明窗[根据 Richard Hamming(理查德·汉明)命名];当 $c = 0.5$ 时,该函数称为韩窗[根据 Julius von Hann(朱利叶·冯·韩)命名]^①。汉明窗和韩窗间的主要区别是后者末尾的一些点为零。通常,两者间的差别在图像处理应用中是觉察不到的。

图 5.42(c)显示了汉明窗的曲线,图 5.42(d)显示了该窗和图 5.42(a)中带限斜坡滤波器的积的结果。图 5.42(e)显示了该积在空间域的表示,该表示通常是通过计算其反 FFT 得到的。很明显,该图与图 5.42(b)比较,加窗斜坡中的振铃现象减少了[图 5.42(b)和图 5.42(e)中的峰值比分别为 2.5 和 3.4]。另一方面,因为图 5.42(e)中的中心瓣比图 5.42(b)中的中心瓣稍宽,我们可以预期,由于使用汉明窗的反投影有较小的振铃,但稍微多一点模糊。正如例 5.19 所示,的确是这种情况。

回顾式(5.11-8), $G(\omega, \theta)$ 是 $g(\rho, \theta)$ 的一维傅里叶变换,这是在一个固定角度 θ 得到的单一投影。式(5.11-16)说明完全的反投影图像 $f(x, y)$ 是由如下步骤得到的:

1. 计算每一个投影的一维傅里叶变换。
2. 如上面说明的那样,用滤波函数 $|\omega|$ 乘以每一个傅里叶变换,就是乘以一个合适的窗(如汉明窗)。
3. 得到每一个滤波后的变换的一维反傅里叶变换。
4. 对步骤 3 得到的所有一维反变换积分(求和)。

因为使用了滤波函数,所以该图像重建方法称为滤波反投影。实践中,由于数据是离散的,因此,所有频率域计算是使用一维 FFT 算法来执行的,并且,对于二维函数,滤波是使用第 4 章中说明的相同基本过程实现的。另一方面,我们也可以在空间域使用卷积来实现滤波,如本节稍后说明的那样。

前面的讨论涉及滤波反投影的加窗问题。在使用任何取样数据系统时,我们还需要考虑取样率问题。由第 4 章我们知道,取样率的选择对图像处理结果具有深远的影响。在现在的讨论中,有两个取样考虑。第一个是所用的射线数量,它决定每个投影的取样数。第二个是旋转角度增量的数量,它决定重建图像的数量(其和产生最终的图像)。欠取样将产生混淆现象,如我们在第 4 章中看到的那样,它在图像本身出现人为缺陷,例如条纹。我们在 5.11.6 节将详细讨论取样问题。

例 5.19 使用滤波反投影的图像重建。

这个例子的关注点是说明用滤波反投影的重建,首先使用一个斜坡滤波器,然后使用一个被汉明窗改进的斜坡滤波器。这些滤波反投影与图 5.40 中的原始反投影结果相比较。为了仅关注滤波的差别,在这个例子中,结果是使用 0.5° 的旋转增量产生的,它是在图 5.40 中用过的增量。在两种情况下,射线间的间隔为一个像素。两个例子中的图像大小均为 600×600 像素,因此,对角线的长度是 $\sqrt{2} \times 600 \approx 849$ 。当旋转角度是 45° 和 135° 时,所用的 849 条射线提供了全部区域的覆盖。

^① 有时,为与汉明窗对比,韩窗也称为汉宁窗。但汉宁窗这一术语是不正确的,是引起混乱的根源。

图 5.43 (a) 显示了使用斜坡滤波器的矩形重建。该结果的最清晰特性是没有视觉可见的模糊。然而, 如预期的那样, 存在振铃现象, 可见暗淡的线条, 特别是在矩形的角的周围。这些线条在图 5.43 (c) 的放大部分中看得更清楚。在斜坡滤波器上使用汉明窗对振铃问题有相当大的帮助, 如图 5.43 (b) 和图 5.43 (d) 所示, 但要付出稍微有点模糊的代价。对图 5.43 (a) 的改进是明显的 (与未加窗的斜坡滤波器相比)。由于幻影图像没有像矩形一样急剧且突出的过渡, 因此即使是使用未加窗的斜坡滤波器, 振铃现象也是感觉不到的, 正如图 5.44 (a) 您所见到的那样。使用汉明窗会得到稍微平滑一些的图像, 如图 5.44 (b) 所示。与图 5.40 (b) 相比, 这两个结果都有较大的改进, 再次证明了滤波反投影方法所固有的优点。

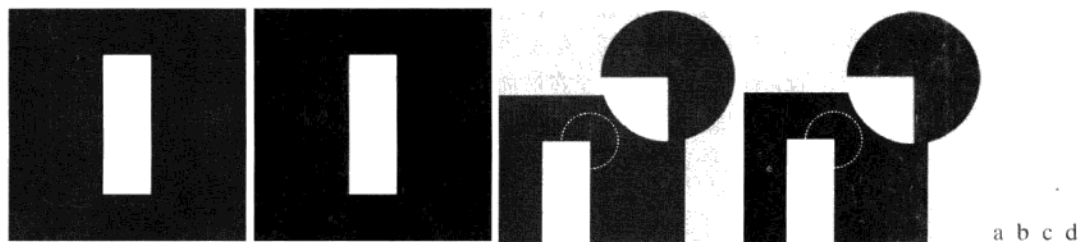


图 5.43 (a) 使用斜坡滤波器的矩形滤波反投影; (b) 用汉明窗斜坡滤波器的矩形滤波反投影。第二行显示了第一行中图像放大后的细节。请与图 5.40 (a) 比较

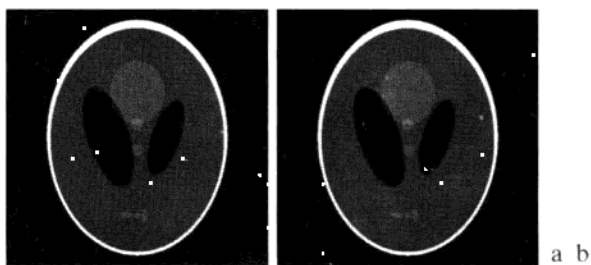


图 5.44 (a) 使用斜坡滤波器的头部幻影的滤波反投影; (b) 使汉明窗斜坡滤波器的头部幻影的滤波反投影。请与图 5.40 (b) 比较

在 CT 的多数应用中 (特别是在医学上), 像振铃这样的人为缺陷有严重的利害关系, 使它们最小化是有意义的工作。调整滤波算法, 并像 5.11.2 节说明的那样使用大量的检测器是在设计中有有助于减少这些效应应考虑的事项。

前边的讨论是以通过一个 FFT 实现得到滤波反投影为基础的。然而, 由第 4 章中的卷积理论我们知道, 使用空间卷积也可得到相同的结果。特别地, 式 (5.11-16) 中方括号内的项是两个频率域函数乘积的反傅里叶变换, 根据卷积定理, 我们知道它等于这两个函数的空间表示 (反傅里叶变换) 的卷积。换句话说, 令 $s(\rho)$ 表示 $|\omega|$ 的反傅里叶变换^①, 我们将式 (5.11-16) 写为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{i2\pi\omega\rho} d\omega \right]_{\rho=x \cos\theta + y \sin\theta} d\theta = \int_0^\pi [s(\rho) \star g(\rho, \theta)]_{\rho=x \cos\theta + y \sin\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\rho, \theta) s(x \cos\theta + y \sin\theta - \rho) d\rho \right] d\theta \end{aligned} \quad (5.11-18)$$

① 如果使用了一个窗函数, 如汉明窗, 则反傅里叶变换对加窗的斜坡函数执行。同样, 我们再次忽略了前面提及的关于连续反傅里叶变换的存在性问题, 因为所有的实现均是使用有限长的离散量执行的。

其中,如第4章中那样,★表示卷积。紧接第一行的第二行的原因见前一段的解释。第三行遵循式(4.2-20)给出的卷积的实际定义。

式(5.11-18)的后两行描述了相同的事情:角度 θ 处的各个反投影可以用相应的投影 $g(\rho, \theta)$ 和斜坡滤波器 $s(\rho)$ 的反傅里叶变换的卷积操作得到。与以前一样,全部的反投影图像可以通过对所有单独的反投影图像的积分(求和)得到。除了计算上的舍入差别外,使用卷积的结果与使用FFT的结果是一样的。在实际的CT实现中,已证明卷积通常在计算上更有效,因此,多数现代CT系统使用这种方法。傅里叶变换在理论表示和算法开发中确实扮演了重要角色(例如, MATLAB 中的CT图像处理就是基于FFT的)。另外,我们注意到,在重建的过程中并不需要存储所有的反投影图像。相反,单一的求和运算只是被最后的反投影图像更新。在该过程的末尾,求和运算将等于所有反投影的总和。

最后,我们要指出,因为斜坡滤波器(甚至在被加窗时)在频率域的直流项归零,故每一幅反投影图像的均值将为零(见图4.30)。这就意味着每一幅反投影图像都将有负像素和正像素。当所有的反投影图像相加形成最终图像时,一些负位置可能变成正的,而平均值可能不是零,但是,典型地,最终图像将还是有负像素。

有一些方法可以处理这个问题。当关于平均值的知识不知道时,最简单的方法是接受在该方法中负值是固有的这样一个事实,并使用式(2.6-10)和式(2.6-11)中描述的过程来标定这一结果。这是本节遵循的方法。当典型的平均值的知识是可用的时候,可将该值加到频率域的滤波器上,从而抵消斜坡并防止直流项为零[见图4.31(c)]。当在空间域中使用卷积时,截断空间滤波器的长度(斜坡的反傅里叶变换)的真正效果都将防止其有零均值,这样就完全避免了迫零问题。

5.11.6 使用扇形射线束滤波反投影的重建

到目前为止的讨论都集中于平行射线束。因为它简单而直观,这是传统上介绍计算机断层成像的成像几何原理。然而,现代CT系统却使用扇形射线束的几何原理(见图5.35),这一节其余的部分讨论该话题。

图5.45显示了一个基本的扇形射线束成像几何,其中,检测器被安放在一个圆弧上,并且假设源的角度增量是相等的。令 $p(\alpha, \beta)$ 表示一个扇形射线束投影,其中 α 是相对于中心射线测量特定检测器的角度 β 是相对于y轴测量的源的角度位移,如图所示。在图5.45中,我们还注意到,扇形射线束中的一条射线可用一条线 $L(\rho, \theta)$ 来表示,在标准形式中,它是在前一节讨论平行射线束成像几何中用以描述一条射线的方法。这就允许我们用平行射线束的结果作为推导扇形射线几何公式的起点。我们继续以卷积为基础推导扇形射线滤波反投影的方法。^①

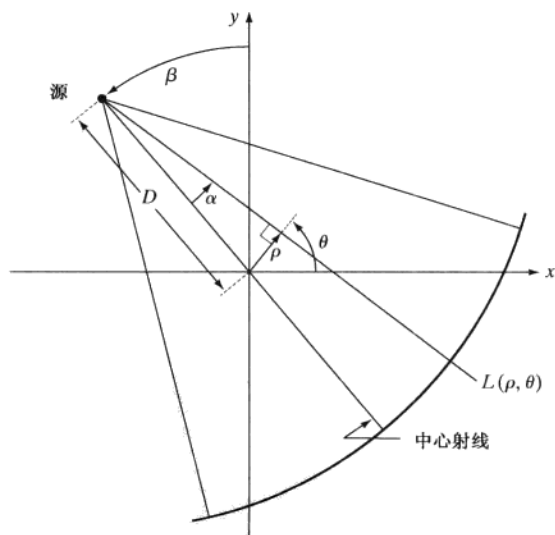


图5.45 基本的扇形射线几何原理。通过源的中心和原点(这里假设为源的旋转中心)的线称为中心射线

① 为平行射线束几何原理推导的傅里叶切片定理并不能直接用于扇形射线束。但是,式(5.11-19)和式(5.11-20)奠定了将扇形射线束几何转换为平行射线束几何的基础,从而允许我们使用前一节中推导的滤波后的平行反投影方法,这时切片定理是适用的。本节的末尾将详细探讨这一点。

我们以图 5.45 中的表示开始, 线 $L(\rho, \theta)$ 的参数与扇形射线参数的关系是

$$\theta = \beta + \alpha \quad (5.11-19)$$

和

$$\rho = D \sin \alpha \quad (5.11-20)$$

其中, D 是从源的中心到 xy 平面的原点的距离。

平行射线成像几何的卷积反投影公式已由式 (5.11-18) 给出。不失一般性, 假设我们集中注意这样的物体, 它们被包围在一个以平面原点为中心、以 T 为半径的圆形区域内。那么对于 $|\rho| > T$, 有 $g(\rho, \theta) = 0$, 且式 (5.11-18) 变为

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-T}^T g(\rho, \theta) s(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) d\rho d\theta \quad (5.11-21)$$

其中, 我们利用了 5.11.1 节说明的事实, 即相隔 180° 的投影互为镜像。在这种方法中, 式 (5.11-21) 中的外积分限扫过整个圆, 正如扇形射线束配置所要求的那样, 检测器被安排为一个圆上。

我们感兴趣的是关于 α 和 β 的积分。为这样做, 我们把它改为极坐标 (r, φ) , 即令 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 由此, 它变为下式:

$$x \cos \theta + y \sin \theta = r \cos \varphi \cos \theta + r \sin \varphi \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi) \quad (5.11-22)$$

利用这一结果, 我们可以把式 (5.11-21) 表示为

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-T}^T g(\rho, \theta) s[r \cos(\theta - \varphi) - \rho] d\rho d\theta$$

这个表达式并不比平行射线束重建写成极坐标的公式有更多的内容, 然而, 积分还是关于 ρ 和 θ 的。为了对 α 和 β 积分, 要求用式 (5.11-19) 和式 (5.11-20) 进行坐标变换:

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} \int_{\arcsin(-T/D)}^{\arcsin(T/D)} g(D \sin \alpha, \alpha + \beta) s[r \cos(\beta + \alpha - \varphi) - D \sin \alpha] D \cos \alpha d\alpha d\beta \quad (5.11-23)$$

其中, 我们使用了 $d\rho d\theta = D \cos \alpha d\alpha d\beta$ [见式 (5.11-13) 的解释]。

这个公式可以进一步简化。首先, 注意积分限从 $-\alpha$ 到 $2\pi - \alpha$, 对 β 来说, 扫过了全部 360° 。因为 β 的所有函数是周期为 2π 的周期函数, 外积分限可分别用 0 和 2π 来代替。项 $\arcsin(T/D)$ 对应于 $|\rho| > T$ 有一个最大值 α_m , 超过该值则有 $g = 0$ (见图 5.46), 因此, 我们可以把内积分的积分限分别用 $-\alpha_m$ 和 α_m 来代替。最后, 考虑图 5.45 中的线 $L(\rho, \theta)$ 。沿着这条线的扇形射线和必须等于沿着同一条线的平行射线和 (射线和是沿着一条线的所有值的和, 因此对于一条给定的射线, 结果必须是相同的, 不管在什么坐标系, 这是明确的)。对于 (α, β) 和 (ρ, θ) 对应值的任何射线和这都是正确的。这样, 令 $p(\alpha, \beta)$ 表示一个扇形射线投影, 它遵循 $p(\alpha, \beta) = g(\rho, \theta)$, 且由式 (5.11-19) 和式 (5.11-20) 有 $p(\alpha, \beta) = g(D \sin \alpha, \alpha + \beta)$ 。合并这两个等式为式 (5.11-23), 我们有

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} p(\alpha, \beta) s[r \cos(\beta + \alpha - \varphi) - D \sin \alpha] D \cos \alpha d\alpha d\beta \quad (5.11-24)$$

这是基于滤波反投影的基本扇形重建公式。

式 (5.11-24) 可进一步变换为更熟悉的卷积形式。参考图 5.47, 它可被表示为 (见习题 5.33)

$$r \cos(\beta + \alpha - \varphi) - D \sin \alpha = R \sin(\alpha' - \alpha) \quad (5.11-25)$$

其中, R 是在扇形射线中源到任何一点的距离, α' 是该条射线与中心射线的夹角。注意, R 和 α' 由 r , φ 和 β 的值决定。把式 (5.11-25) 代入式 (5.11-24) 得到

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} p(\alpha, \beta) s[R \sin(\alpha' - \alpha)] D \cos \alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (5.11-26)$$

可以证明(见习题 5.34)

$$s(R \sin \alpha) = \left(\frac{\alpha}{R \sin \alpha} \right)^2 s(\alpha) \quad (5.11-27)$$

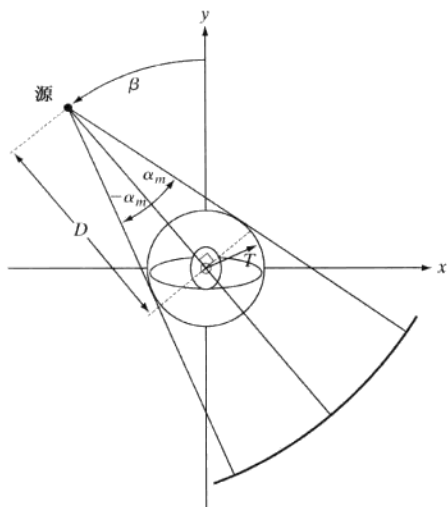


图 5.46 包围感兴趣区域所需的最大 α 值

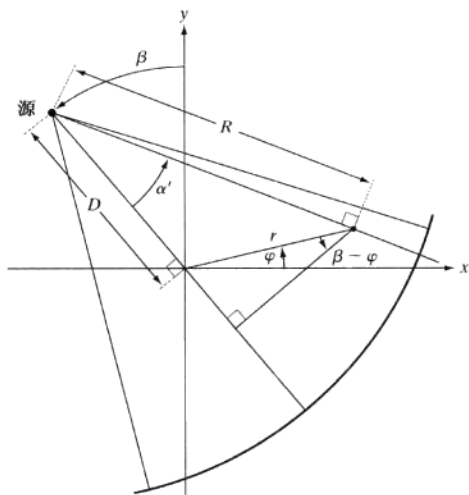


图 5.47 扇形射线上任意一点的极坐标表示

使用该表达式, 我们可以把式 (5.11-26) 写为

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} \left[\int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} q(\alpha, \beta) h(\alpha' - \alpha) d\alpha \right] d\beta \quad (5.11-28)$$

其中,

$$h(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 s(\alpha) \quad (5.11-29)$$

和

$$q(\alpha, \beta) = p(\alpha, \beta) D \cos \alpha \quad (5.11-30)$$

我们可以看出式 (5.11-28) 中方括号内的积分是一个卷积表达式, 这样, 式 (5.11-24) 中的图像重建公式就可以如同用函数 $q(\alpha, \beta)$ 和 $h(\alpha)$ 的卷积那样来实现。与平行投影重建的公式不同, 基于扇形射线束投影重建包含有 $1/R^2$ 项, 它是与源的距离成反比的加权系数。实现式 (5.11-28) 的计算细节超出了当前讨论的范围(关于该主题的详细论述, 请参阅 Kak and Slaney[2001])。

直接代替式 (5.11-28) 的实现, 特别是在软件模拟中的一种常用的方法是: (1) 使用式 (5.11-19) 和式 (5.11-20) 把扇形射线几何转换为平行射线几何, (2) 使用 5.11.5 节中开发的平行射线重建方法。我们将用一个如何这样做的例子来结束本节的讨论。如早些时候指出的那样, 以角度 β 获取的一个扇形射线投影 p , 有一个相应的以角度 θ 获取的平行射线投影 g , 因此有

$$p(\alpha, \beta) = g(\rho, \theta) = g(D \sin \alpha, \alpha + \beta) \quad (5.11-31)$$

其中, 第二行来自式 (5.11-19) 和式 (5.11-20)。

令 $\Delta\beta$ 表示连续扇形投影的角度增量, 并令 $\Delta\alpha$ 是射线之间的角度增量, 它决定每一个投影中的样本数量。利用约束

$$\Delta\beta = \Delta\alpha = \gamma$$

(5.11-32)

然后，利用 $\beta = m\gamma$ 和 $\alpha = n\gamma$ ，其中 m 和 n 是整数，我们可以把式(5.11-31)写成

$$p(n\gamma, m\gamma) = g[D\sin n\gamma, (m+n)\gamma]$$

(5.11-33)

该式指出第 m 个射线投影中的第 n 条射线等于第 $(m+n)$ 个平行投影中的第 n 条射线。式(5.11-33)右边的 $D\sin n\gamma$ 项意味着从扇形射线投影转换为平行射线投影是不均匀取样，如果取样间隔 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\beta$ 太粗，则可能导致模糊、振铃和混淆的问题，正如下面的例子说明的那样。

例 5.20 使用滤波扇形反投影的图像重建。

图 5.48(a)显示了：(1)使用 $\Delta\alpha = \Delta\beta = 1^\circ$ 产生矩形图像的扇形投影，(2)使用式(5.11-33)将每一个扇形射线转换为相应的平行射线，(3)把 5.11.5 节推出的滤波反投影方法用于平行射线。图 5.48 (b) 到 (d) 分别显示了使用 0.5° 、 0.25° 和 0.125° 增量的结果。在所有的情况下都使用汉明窗。这一角度增量的变化用于说明欠取样的效应。

图 5.48 (a) 中的结果清楚地指出， 1° 的增量太粗，模糊和振铃现象十分明显。图 5.48 (b) 中的结果在感觉上很有趣，它与图 5.43 (b) 相比很差，而图 5.43 (b) 也是使用 0.5° 的角度增量产生的。事实上，如图 5.48 (c) 所示，即便使用 0.25° 的角度增量重建也不比图 5.43 (b) 好。如图 5.48 (d) 所示，为使两个结果可以比较，我们必须使用约为 0.125° 的角度增量。这个角度增量可产生 $180 \times (1/0.25) = 720$ 个样本，这接近于例 5.19 中的平行投影所用的 849 条射线。这样，可以预料这些结果在外观上接近于使用 $\Delta\alpha = 0.125^\circ$ 时的结果。

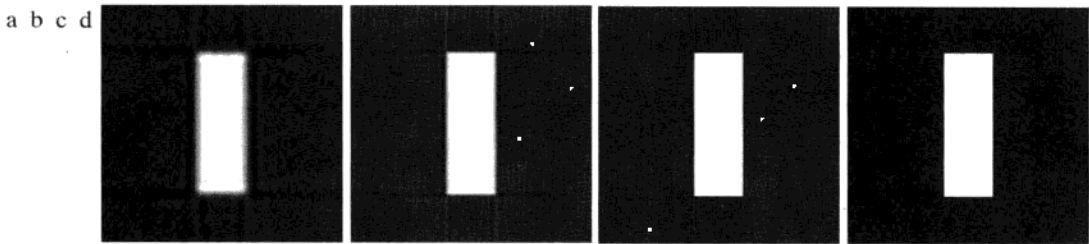


图 5.48 使用滤波扇形反投影的矩形图像的重建：(a) α 和 β 的增量为 1° 的结果；(b) 增量为 0.5° 的结果；(c) 增量为 0.25° 的结果；(d) 增量为 0.125° 的结果。请比较图 (d) 和图 5.43 (b)

除了如正弦干扰那样的混淆更为可见外，类似的结果使用头部幻影也可以得到。在图 5.49 (c) 中，我们看到，即使使用 $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0.25^\circ$ ，严重的失真也依然存在，特别是在椭圆的外围。当使用矩形时，使用 0.125° 的增量最终产生了可与图 5.44 (b) 中头部幻影反投影图像相比的结果。这些结果说明了在现代 CT 系统的扇形射线几何原理中必须使用数以千计的检测器来减少混淆效应的原因。

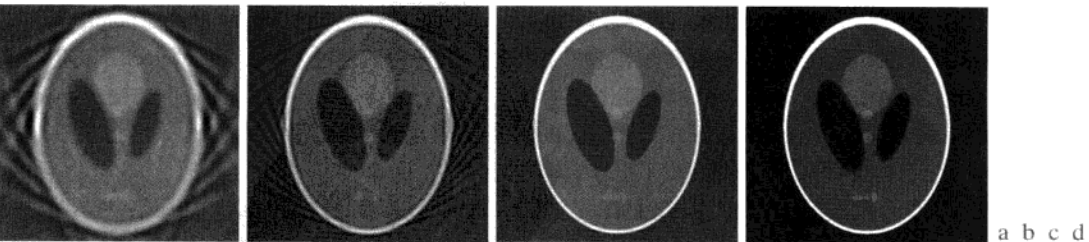


图 5.49 使用滤波扇形反投影的头部幻影图像的重建：(a) α 和 β 的增量为 1° 的结果；(b) 增量为 0.5° 的结果；(c) 增量为 0.25° 的结果；(d) 增量为 0.125° 的结果。主比较图 (d) 和图 5.44 (b)

小结

本章中的复原结果基于这样一个假设,即图像退化可建模为一个线性的、位置不变的过程,以及图像值不相关的加性噪声。即使这些假设并不完全正确,用前几章提出的方法得到有用的结果也常常是可能的。

这一章推导的某些复原技术基于各种最佳准则。“最佳”一词的使用涉及到严格的数学概念,而不是指人类视觉系统的最佳响应。事实上,对于视觉感知知识的缺乏妨碍了图像复原问题的一般表达,而图像复原问题要考虑到观察者的偏好与能力。在这些限制条件下,本章所介绍概念的优势是基本方法的推导,它有合理的预测能力和坚实的基础知识的支持。

就像在第3章和第4章中那样,一定的复原任务,譬如降低随机噪声,是在空间域中使用卷积模板来执行的。我们也发现频率域对于降低周期性噪声和对于某些重要的退化建模是很理想的,如在图像获取期间因为运动导致的模糊。我们还发现,对于表达复原滤波器来说,频率域也是很有用的工具,如维纳滤波器和约束最小二乘方滤波器。

如第4章中提到过的那样,频率域为实验提供了直观且可靠的基础。一旦对于给定的应用找到了令人满意的一种方法(滤波器),其实现通常是通过数字滤波器的设计在频率域近似解决来执行的。正如第4章末尾指出的那样,在计算机中或专用的硬件/固件系统中运行速度要快得多。

投影重建图像的论述是图像处理在这一领域的基础,虽然只是介绍性的。如5.11节说明的那样,计算机断层(CT)是投影重建图像的主要应用领域。虽然我们只关心X射线断层,但5.11节建立的原理也适用于其他CT成像模式,譬如SPECT(单光子发射断层)、PET(正电子发射断层)、MRI(核磁共振成像)和某些超声成像模式。

参考文献

关于5.1节中线性退化模型的其他读物,请参阅Castleman[1996]和Pratt[1991]。Peebles[1993]的书籍提供了噪声概率密度函数及其特性的一般水平的概括(见5.2节)。由Papoulis[1991]所写的书更深入、详细地概括了这些概念。5.3节的参考文献有Umbaugh[2005]、Boie和Cox[1992]、Hwang和Haddad[1995]及Wilburn[1998]的论著。自适应中值滤波的资料见Eng和Ma[2001, 2006]。自适应滤波器设计的一般领域对于5.3节所讨论的自适应滤波器是很好的背景。由Haykin[1996]所著的书籍对这一题目是一个很好的介绍。5.4节中的滤波器是第4章内容的直接延伸。5.5节内容的其他读物见Rosenfeld和Kak[1982]及Pratt[1991]的著述。

估计退化函数这一主题(见5.6节)是当前一个重要的领域。估计退化函数的一些早期技术由Andrews和Hunt[1977]、Rosenfeld和Kak[1982]、Bates和McDonnell[1986]及Stark[1987]给出。因为退化函数很少能精确知道,所以过去几年中提出了大量的技术,其中强调了特殊复原。例如,Geman和Reynolds[1992]和Hurn和Jennison[1996]提出处理保护灰度急剧过渡以试图强调清晰度的问题,Boyd和Meloche[1998]则专注于复原退化图像中的细小物体。处理模糊图像的技术的例子见Yitzhaky等人[1998]、Harikumar和Bresler[1999]、Mesarovic[2000]及Giannakis和Heath[2000]的著述。序列图像的复原也是考虑的重点,Kokaram[1998]所著的书籍为这一领域提供了很好的基础。

过去几年来,对于5.7节到5.10节讨论的滤波方法,在图像处理方面的书籍和论文中已用各种方法进行了解释。有两种主要方法作为这些滤波器开发的基础。一种方法是以使用矩阵理论的通用表达为基础的,如Andrews和Hunt[1977]的介绍。这种方法精致且通用,但对于新涉猎该领域的人来说比较困难,因为它缺乏直观性。直接基于频率域滤波的方法(在这一章我们所遵循的方法)对于初次接触复原的人来说通常比较容易,

但是缺少矩阵法统一的数学严谨性。两种方法都可以达到相同的结果,但根据我们的授课经验,提出的各种材料指出,初涉这一领域的学生更喜欢后一种方法。5.7 节到 5.10 节所述滤波概念的补充读物是 Castleman[1996]、Umbaugh[2005]及 Petrou 和 Bosdogianni [1999]的著述。最后的参考文献在二维频域滤波器和相应的数字滤波器之间提供了很好的联系。关于二维数字滤波器的设计,请参阅 Lu and Antoniou[1992]的著述。

计算机断层的基本参考资料是 Rosenfeld 和 Kak[1982]、Kak 和 Slaney[2001]及 Prince 和 Links[2006] 的著述。关于 Shepp-Logan 幻影的参考资料见 Shepp 和 Logan[1974]的著述,关于 Ram-Lak 滤波器起源的详细内容见 Ramachandran 和 Lakshminarayanan[1971]的文献。O'Connor 和 Fessler[2006]的论文是有关计算机断层在信号与图像处理领域当前研究的代表性论文。

本章中讨论过的多数内容实现的软件技术,可参阅 Gonzalez, Woods 和 Eddins[2004]的著述。

习题

标有星号的习题的详细解答可在本书的网站上找到。该网站还包含了基于本章内容所建议的项目。

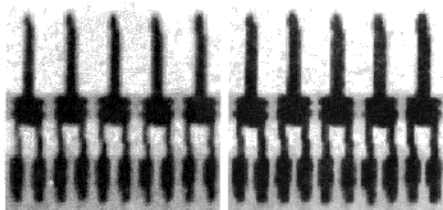
★5.1 测试模式中的白色条带的大小为 7 像素宽、210 像素高。两个白色条带之间的间距为 17 像素。应用下面的处理后,该图像看起来像什么?

- (a) 3×3 算术均值滤波器。
- (b) 5×5 算术均值滤波器。
- (c) 9×9 算术均值滤波器。

注意:与对该图像滤波相关的这一习题及后面几个习题看起来有点单调,然而,它们值得尝试,因为它们可帮助理解这些滤波器如何工作。理解了一个特殊滤波器对图像的影响后,您的回答可以是关于结果图像的简短描述。例如,“结果图像将由 3 个像素宽、206 个像素高的白色条带组成”。一定要描述白色条带的任何变形,例如圆角。您可以忽略模板仅包含了部分图像像素引起的图像边界效应。



- 5.2 使用几何均值滤波器重做习题 5.1。
- ★5.3 使用谐波均值滤波器重做习题 5.1。
- 5.4 使用逆谐波均值滤波器($Q = 1.5$)重做习题 5.1。
- ★5.5 使用逆谐波均值滤波($Q = -1.5$)重做习题 5.1。
- 5.6 使用中值滤波器重做习题 5.1。
- ★5.7 使用最大值滤波器重做习题 5.1。
- 5.8 使用最小值滤波器重做习题 5.1。
- ★5.9 使用中点滤波器重做习题 5.1。
- 5.10 分别从图 5.7(c)和图 5.7(d)右上角提取的两个子图像如右所示。左侧的子图像是使用一个大小为 3×3 的算术均值滤波器处理的结果,右侧的子图像是使用一个相同大小的几何均值滤波器处理的结果。
- ★(a) 解释为什么使用几何均值滤波得到的子图像模糊较少。(提示:您的分析可通过检查灰度的一维阶跃过渡来开始。)



- (b) 解释为什么右侧图像中黑色元件更粗了。
- 5.11 根据式(5.3-6)给出的逆谐波滤波器,回答如下问题。
 - (a) 解释为什么当 Q 为正值时,该滤波器可有效去除“胡椒”噪声。

- (b) 解释为什么当 Q 为负值时, 该滤波器可有效去除“盐粒”噪声。
 (c) 解释为什么选择的 Q 值不当时, 该滤波器给出较差结果(譬如图 5.9 所示的结果)。
 (d) 讨论当 $Q = -1.5$ 时该滤波器的特性。
 (e) 讨论(对于 Q 为正和负的情况)恒定灰度级区域中该滤波器的特性。

★5.12 给出与表 4.6 中带阻滤波器对应的高斯和布特沃斯带通滤波器的公式。

5.13 以式(4.10-5)的形式给出高斯、布特沃斯和理想陷波带阻滤波器的公式。

★5.14 证明二维连续余弦函数

$$f(x, y) = A \cos(u_0 x + v_0 y)$$

的傅里叶变换是共轭冲激对

$$f(u, v) = -\frac{A}{2} \left[\delta \left(u - \frac{u_0}{2\pi}, v - \frac{v_0}{2\pi} \right) + \delta \left(u + \frac{u_0}{2\pi}, v + \frac{v_0}{2\pi} \right) \right]$$

[提示: 使用式(4.5-7)中的连续傅里叶变换, 并以指数形式表示该余弦函数。]

5.15 使用式(5.4-11)推导式(5.4-13)。

★5.16 考虑一个线性、位置不变的图像退化系统, 其冲激响应为

$$h(x - \alpha, y - \beta) = e^{-[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]}$$

假设系统的输入是由宽度无限小的一条线组成的图像, 这条线位于 $x = a, y = b$ 处并由 $f(x, y) = \delta(x - a, y - b)$ 建模, 其中 δ 是一个冲激函数。假设无噪声, 输出图像 $g(x, y)$ 是什么?

5.17 在图像获取期间, 在时间 T_1 内, 一幅图像在垂直方向上做均匀线性运动。然后, 在时间 T_2 内, 运动方向转为水平方向。假设图像改变方向所用的时间可以忽略不计, 且快门开关时间同样也可以忽略不计, 给出模糊函数 $H(u, v)$ 的表达式。

★5.18 考虑在 x 方向均匀加速导致的图像模糊问题。如果图像在时间 $t = 0$ 时静止, 在时间 T 内, 以均匀加速度 $x_0(t) = at^2$ 加速, 请找出模糊函数 $H(u, v)$ 。可以假设快门开关时间忽略不计。

5.19 设计一个在接近着陆时从行星发送图像的空间探测器。在着陆的最后阶段, 一个控制推进器坏了, 导致探测器沿其垂直轴急速旋转。在着陆期间的最后两秒钟发送的图像由于这种圆周运动而被模糊了。摄像机位于探测器的底部, 沿探测器的垂直轴并指向下方。幸运的是, 探测器的转动也是沿着垂直轴的, 因此图像是由均匀的旋转运动模糊的。在每幅图像获取期间, 探测器旋转 $\pi/12$ 弧度。假设在图像获取期间垂直运动可以忽略。请以公式形式给出复原图像的解决方案。

★5.20 如右所示的图像是心脏立体再现的一个模糊的二维投影。已知图像右侧底部的每个十字线宽 4 像素、长 20 像素, 且模糊之前的灰度值为 255。试给出一步一步的过程, 指出您怎样应用刚才提供的信息得到模糊函数 $H(u, v)$ 。

5.21 某 X 射线成像几何产生了一种模糊退化, 这种模糊退化可用空间圆对称函数

$$h(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - \sigma^2}{\sigma^4} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\pi^2}}$$

与该遥感图像的卷积来建模。假设是连续变量, 证明频率域中的退化由如下表达式给出:

$$H(u, v) = -\sqrt{2\pi}\sigma(u^2 + v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2 + v^2)}$$

(提示: 从 4.9.4 节、表 4.3 中的性质 13 和习题 4.26 入手。)



(原图像由 GE 医学系统提供)

★5.22 使用习题 5.21 中的传递函数, 给出几何均值滤波器的表达式, 假设噪声功率谱和未退化信号之比为常数。然后, 给出维纳滤波器的表达式。

5.23 使用习题 5.21 中的传递函数, 给出约束最小二乘方滤波器的最终表达式。

5.24 假设图 5.1 中的模型是线性且位置不变的, 并且噪声与图像是不相关的。证明输出功率谱为

$$|G(u, v)|^2 = |H(u, v)|^2 |F(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2$$

参考式(5.5-17)和式(4.6-18)。

5.25 Cannon[1974]建议过一个满足条件

$$|\hat{F}(u, v)|^2 = |R(u, v)|^2 |G(u, v)|^2$$

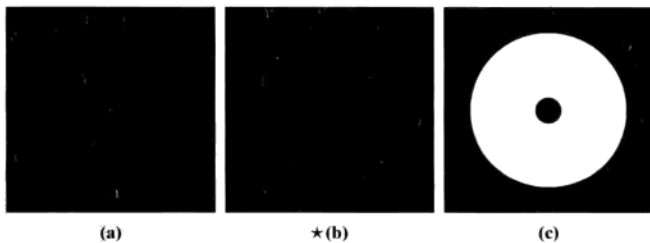
的复原滤波器 $R(u, v)$, 并且以强制复原图像的功率谱 $|\hat{F}(u, v)|^2$ 等于原图像的功率谱 $|F(u, v)|^2$ 为前提。假设该图像和噪声是不相关的。

★(a) 根据 $|F(u, v)|^2$ 、 $|H(u, v)|^2$ 和 $|N(u, v)|^2$ 给出 $R(u, v)$ 。[提示: 参阅图 5.1、式(5.5-17)和习题 5.24]。
(b) 使用(a)中得到的结果来说明式(5.8-2)给出的结果。

5.26 一位天文学家使用一台高倍望远镜观察到的图像有点模糊。制造商告诉天文学家, 设备是按说明书操作的。望远镜镜头把图像聚焦到高分辨率 CCD 成像阵列上, 然后望远镜使用电子学方法将图像转换为数字图像。试图通过传导控制实验室的实验使用镜头和成像传感器来改进这种情况是不可能的, 因为望远镜部件的尺寸和重量太大。天文学家听说您是一位成功的图像处理专家, 打电话要求您帮助她提出将图像变得清晰一些的数字图像处理方案。假设您能得到的图像仅仅是星体图像, 请问您如何解决该问题?

★5.27 一位考古学教授正在从事罗马帝国时期流通货币方面的研究工作。他最近了解到对其研究起决定性作用的 4 个罗马硬币陈列在伦敦的大英博物馆中。遗憾的是, 在到达博物馆后, 他被告知这些硬币最近被盗了。进一步的部分研究表明, 依靠博物馆保存的这些硬币的照片是可靠的。遗憾的是, 硬币的照片模糊为一些点, 以至于无法识别数据和小标记。模糊的原因在于拍摄照片时摄像机散焦。作为一名图像处理专家和教授的朋友, 要求您帮助决定是否计算机处理能用于复原图像, 并为教授指出在哪里能读这个标记。而且您被告知, 与同一时期其他有代表性的硬币一样, 用于拍摄这些照片的摄像机仍然可用。提出一步一步解决这一问题的过程。

5.28 画出下列方形图像的雷登变换。在画出的图形中定量地标出所有的重要特性。图(a)由中间的一个点组成, 图(b)沿对角线有两个点。根据灰度剖面来描述您对图(c)的解决方案。假设使用平行射线几何理论。



5.29 证明高斯函数 $f(x, y) = A \exp\left(\frac{-x^2 - y^2}{2\sigma^2}\right)$ 的雷登变换 [见式(5.11-3)] 是 $g(\rho, \theta) = A\sqrt{2\pi}\sigma \exp(-\rho^2)$ 。

[提示: 参考例 5.17, 这里我们使用对称性来简化积分。]

- 5.30** ★ (a) 证明单位冲激函数 $\delta(x, y)$ 的雷登变换 [见式 (5.11-3)] 是 $\rho\theta$ 平面中通过原点的一条垂直线。
(b) 证明冲激 $\delta(x-x_0, y-y_0)$ 的雷登变换是在 $\rho\theta$ 平面中的一条正弦曲线。
- 5.31** 证明雷登变换 [见式 (5.11-3)] 的下列性质的正确性:
- ★ (a) 线性: 雷登变换是一个线性算子 (见 2.6.2 节关于线性算子的定义)。
 - (b) 平移性质: $f(x-x_0, y-y_0)$ 的雷登变换是 $g(\rho-x_0\cos\theta-y_0\sin\theta, \theta)$ 。
 - ★ (c) 卷积性质: 证明两个函数的卷积的雷登变换等于两个函数的雷登变换的卷积。
- 5.32** 给出由式 (5.11-14) 推导出式 (5.11-15) 的步骤。您需要用到性质 $G(\omega, \theta+180^\circ) = G(-\omega, \theta)$ 。
- ★ **5.33** 证明式 (5.11-25) 的正确性。
- 5.34** 证明式 (5.11-27) 的正确性。