

力学

力学是研究力作用于物体使之产生运动的物理学分支.它是第一个将物理定律成功地应用于生命体系的物理学领域,主要用于理解动物运动的规律.现代的力学概念首先由艾萨克·牛顿在其出版于1687年的有关力学的著作《自然哲学之数学原理》中阐明.而人们对力学的研究起源更早,可追溯到公元前4世纪的古希腊哲学家.此外,沉迷于科学和体育的古希腊人也最先将物理原理应用于动物的运动.亚里士多德曾写道:“运动之动物乃通过推挤其下之物而改变其位置……”尽管希腊哲学家提出的一些概念是错的,但是他们对自然普遍原理的寻求精神为早期的科学思想打下了烙印.

古希腊衰落之后,科学研究工作进入了停歇期.直到文艺复兴开始,包括科学在内的各种活动又重现生机.在文艺复兴期间,达·芬奇(1452~1519)对动物的运动与肌肉的功能做了详细的观察和研究.达·芬奇之后,数以百计的科学家做了进一步的研究,随着分析技术和仪器的发展,人们增进了对动物运动的力学原理的理解.今天,人体运动的研究已成为人体运动学以及生物力学的一部分.人体运动学主要针对运动员的活动研究人体运动,而生物力学则涵盖更广的领域——不仅包括肌肉运动,也包括骨骼和组织(如肺、心脏)的力学性质的研究.义肢与人工心脏等设备的制造是当前生物力学研究的活跃领域.

本章内容分为以下几部分:前两节是有关质点的运动学和动力学;1.3节主要讨论静力平衡与作用在人体肌肉和骨骼上的力;1.4节讨论刚体的转动;1.5节讨论骨的力学性质.

1.1 质点运动

运动学是对运动的定量描述.就沿着空间某一轨道运动的质点来说,它能够精确地描述质点的位置、速度和加速度是如何随时间变化的.就物体来说,它能用数学描述物体在空中移动和旋转时的位置和取向.运动学能精确地描述运动,但不涉及运动的原因.运动学可以说是力学的“解剖学”.

1.1.1 速度和加速度

物理学中对一个物体的最基本描述是确定其在空间的位置,它是一个三维空间的问题.例如,欲确定室内一点 P 的位置(见图1-1),可从一角(称为原点 O)开始,先沿一边测其距离 r_x ,再测沿另一边的距离 r_y ,最后测其高度 r_z .物理测量常常从一个适当的参考点 O 开始,这个点



即是一组相互垂直的轴(即坐标系)的原点. 一个质点的位移 r 是同时指它的方向和离原点 O 的距离. 在直角(笛卡儿)坐标系中 r 可由它在 x, y 和 z 轴上的投影(分量)决定. 图 1-1 中的 r 的大小可用毕达哥拉斯定理求出:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

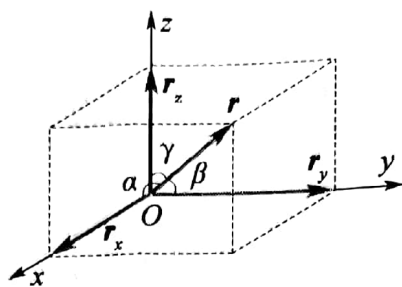


图 1-1 一点在直角坐标系中的位移

r 的方向可由 r 相对于 x, y 和 z 轴的夹角 α, β 和 γ 求出, 即 $\cos \alpha = r_x/r, \cos \beta = r_y/r$ 和 $\cos \gamma = r_z/r$. $\cos \alpha, \cos \beta$ 及 $\cos \gamma$ 称为方向余弦.

对二维空间中的位移, 如图 1-2 所示, 某一点的位移只用分量 r_x 和 r_y , 其方向用一个角 θ 确定.

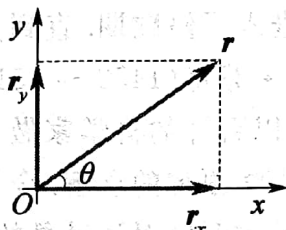


图 1-2 二维空间中的位移

速率(speed)是指单位时间内运动的总路程(不计方向), 如 70 km/h. 速度(velocity)是指单位时间内的位移, 如向北 70 km/h. 匀速度意味着不仅速率不变, 同时方向也不变. 假设在 30 min 内向正北方驾车行驶了 25 km, 则平均速度为 $25 \text{ km}/0.5 \text{ h} = 50 \text{ km/h}$. 但在这次短途旅行中, 瞬时速度很可能是改变的, 瞬时速度是指某一时刻速度的数值. 质点的瞬时速度是位移随时间的变化率, 其数学表述式为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (1-1)$$

即瞬时速度是在非常小的时间间隔中的平均速度的极限值, 用微分表示. 一个物体的最简单的运动是匀速直线运动.

加速度(acceleration)是速度随时间的变化率. 与速度一样, 加速度也是一个矢量, 即

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1-2)$$

在运动学中为什么需要加速度的概念呢? 伽利略(Galileo, 1564 ~ 1642)曾在他的落体运动的研究中作了部分回答. 下面是引自伽利略的《两种新科学》中的一段话.

“因此, 当我观察原来静止的物体, 从高处下落而速度不断获得新的增加时, 为什么我们不能认为这种增加的方式是格外简单而又为人们所易理解的呢? 现在如果仔细地考察这件事情, 我们就会发现再也没有比重复等量的增加更简单的了.”……“正如考虑和定义匀速运动时, 用



相等的时间间隔通过相等的距离一样,我们也以类似的方式,考虑相等的时间间隔的速度增加,可以想象其并不复杂,所以,我们要讨论的运动的定义可以陈述如下:物体从静止出发,在相等时间间隔内获得相等的速度增加的运动,称为匀加速运动。”

后来,伽利略进一步用实验证明了落体运动确实是匀加速运动,伽利略当时是用他自己的脉搏来测量时间的。尚需牛顿解决的问题是:为什么所有落体都具有相同的加速度而与其重量无关,但牛顿还从更一般上证明了作用在物体上的力与其加速度的关系。所以,只要确定了作用在物体上的合力,就等于确定了该物体上的加速度。然后,由加速度经过两次积分就能解出运动学方程。

最简单的加速运动的例子是伽利略考虑过的,即匀加速运动,见例 1.1。

例 1.1 一辆沿直线行驶的汽车,其速度在 10 s 内由 30 km/h 均匀增至 70 km/h,它的加速度多大?

解

$$1 \text{ km/h} = \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 0.278 \text{ m/s}$$

因此

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(70 - 30) \times (0.278 \text{ m/s})}{10 \text{ s}} = 1.1 \text{ m/s}^2$$

因为 $\Delta v = v_t - v_0$, 式中 v_0 是物体的初速度, v_t 是物体的末速度, 所以由加速度定义可得

$$v_t - v_0 = at \quad (1-3)$$

此式表明,速度的改变值等于加速度乘以速度改变所经历的时间。

当速度均匀变化,平均速度等于初速度和末速度的平均值,即

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v_t}{2} \quad (1-4)$$

在时间 t 内移动的距离可由 $s = \bar{v}t$ 求出。则由方程(1-3)和(1-4)可得

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1-5)$$

以及

$$v_t^2 = v_0^2 + 2as \quad (1-6)$$

对匀加速运动,已知 v_0 、 v_t 、 a 、 t 和 s 中的任何 3 个量,从式(1-3)~(1-6)选择适当的方程式就可以求出其他的未知量。把数值代入各方程的过程中,注意选择一个方向作为正方向,并且要把这个正方向统一用于位移、速度和加速度中。

例 1.2 高速赛车是以它的速度从 0 增至 100 km/h 的加速能力来鉴定其性能的,较好的赛车要在 9 s 内做到这一点。试问在这样的测试中赛车行驶的距离多远?

解

$$100 \text{ km/h} = \frac{(100 \times 1\,000) \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 27.8 \text{ m/s}$$

所以

$$a = \frac{27.8 \text{ m/s} - 0}{9 \text{ s}} = 3.1 \text{ m/s}^2$$

由式(1-5)得



$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times 3.1 \text{ m/s}^2 \times (9 \text{ s})^2 = 126 \text{ m}$$

1.1.2 自由落体

自由落体是除它自身的重量(即重力)外不受其他力作用的物体. 自由落体的加速度(g) 在纬度 45° 的海平面上近似为 9.8 m/s^2 . g 的值随在地球上的不同地区而有改变, 但为计算简单, 近似认为是常量. 因为一个自由落体是被均匀加速的, 所以式(1-3) ~ (1-6) 完全可用于这种运动形式.

我们平常观察到的落体并非严格的自由落体, 因为它们还受到空气阻力, 由于空气阻力随速率的增大而增大, 因而加速度不再是均匀的. 对于一个很轻的落体, 如一片羽毛或一粒灰尘, 其空气阻力很快大到与它的重力相等, 之后即以匀速下落, 这个匀速率即是它的最终速率.

一个从飞机里跳出来的人, 如他延迟张开降落伞, 则其最终速率可达约 190 km/h . 如他张开降落伞, 由于增加了空气阻力, 他的最终速率减小到约 22 km/h , 这个速率大致等于一个人从 2 m 高跳下而获得的速率.

例 1.3 证明上面所说的这个人从 2 m 高处跳下, 是以 22 km/h 的速率着地.

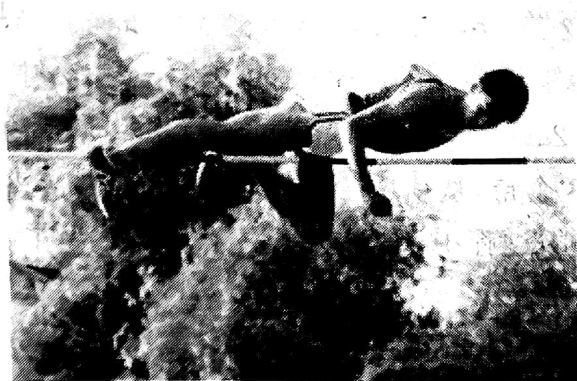
解 因为要求末速度, 利用公式(1-6)有

$$v_i^2 = v_0^2 + 2as = 2 \times 9.8 \times 2 = 39.2 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

因此

$$v_i = \sqrt{39.2 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 6.26 \text{ m/s} = 22.5 \text{ km/h}$$

我们可以利用匀加速运动公式来分析各种动物的相对跳跃能力. 表 1-1 列出了一些动物垂直跳跃高度的记录. 注意, 人的跳跃高度比跳高纪录(约 2 m) 要低. 这是因为人只要把他的身体横过来就已经能越过大约为他身体高度一半的横杆. 由于这种所谓俯卧式跳高方法并不为其他动物采用(见图 1-3), 所以对于跳跃能力的比较来说, 表中所列的数据是合适的.



(a) 俯卧式



(b) 背越式

图 1-3 两种情况下跳高, 运动员都尽可能将身体重心保持在横杆下

表 1-1 人和一些动物的加速距离 d 及垂直高度 h

	加速距离 d/cm	垂直高度 h/cm
人	50	100
袋鼠	100	270



	加速距离 d/cm	垂直高度 h/cm
青蛙	9	30
蝗虫	3	30
跳蚤	0.08	10

人和动物直跳的动作是先屈腿,然后再迅速地伸展开来.通常加速距离小于动物的腿长.一旦离开地面,动物只受到重力的作用,因而可以使用匀加速运动公式.如果我们近似认为在起跳过程中加速度 a 是恒值,则也可以分析起跳过程.

例 1.4 利用表 1-1 的数据,求(1)人的起跳速率 v_i 和(2)起跳加速度大小 a_i .

解 (1) 令坐标 x 表示人的重心位置.取 $+x$ 方向向上,取人在直立或刚离开地面时的位置为原点 $x=0$,如图 1-4 所示.为求得起跳高度,考虑跳跃时的腾空过程.在这过程中,加速度大小为 $-g$,速率从 $v = v_i$ 变为 $v = 0$.高度变化了 $x - x_0 = h = 1 \text{ m}$,则由式(1-6)得

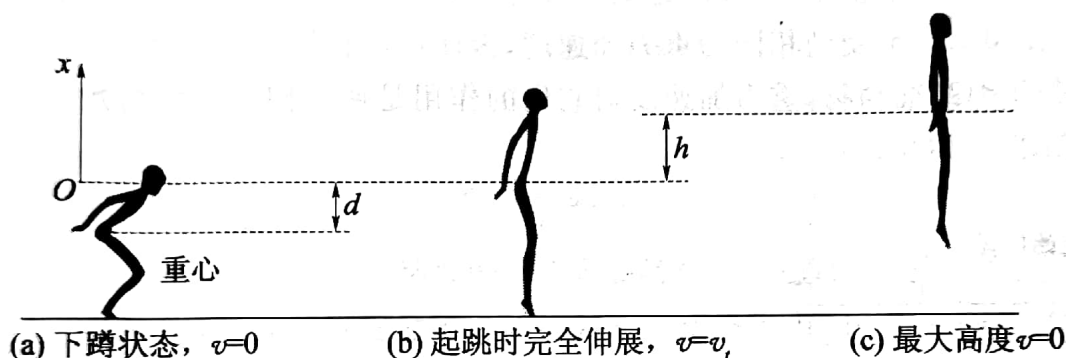


图 1-4 垂直跳跃时的位置,横线处表示身体重心的位置

$$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m}} = 4.4 \text{ m/s}$$

(2) 在起跳过程中,假定加速度 a 为恒值.速率由 $v_0 = 0$ 增加至 v_i ,高度变化了 $d = 0.5 \text{ m}$.因此有

$$v_i^2 = 2ad$$

将此式与 $v_i^2 = 2gh$ 比较,求得

$$a = \frac{h}{d}g = \frac{1}{0.5} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 19.6 \text{ m/s}^2$$

起跳加速度和时间对不同的动物差异极大.如果人具有与跳蚤相同的加速度,则人将会跃至 50 m 以上的高度.不论这些差别多么巨大,但一次跳跃中某一定量的肌肉所能提供的总能量对所有动物是大致相同的.

1.1.3 抛射体

踢出或扔出的球,跃起的动物以及发射的炮弹都是抛射体的例子.若忽略空气阻力,则抛射体的运动只受恒定重力加速度的影响.由于抛射体的速度与加速度不在同一个方向,不能直接使用 1.1.1 节的直线运动方程式.由矢量的合成分解性质,物体在平面内的运动问题等效于两个方向的直线运动问题.因而,若给出物体的初始位置和速度,则利用匀加速的直线运动方



程可求得以后的位置和速度.

取 x 轴为水平方向, y 轴的正向竖直向上. 于是 $a_x = 0$ 及 $a_y = -g$, 若物体初始位置和速度分别为 (x_0, y_0) 和 (v_{0x}, v_{0y}) , 则

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1-7)$$

和

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} - gt \quad (1-8)$$

抛射体运动有两个常用于演示的有趣例子. 一个例子是同时释放架子上的两个钢球, 如图 1-5(a) 所示, 球 1 由弹簧水平弹出, 而球 2 则由静止落下, 判断哪个球先落地. 虽然初看起来颇为棘手, 但只要想清楚, 在 y 方向两球具有完全相同的初始位置、初速度和加速度, 即两个球的垂直运动方程相同, 所以它们必然是同时着地. 这清楚地说明了水平方向与竖直方向的运动是相互独立的观点.

第 2 个例子更为巧妙. 猎手瞄准动物模型射出一子弹, 射击的同时动物模型自由下落. 令人惊奇的是, 子弹在空中击中动物. 问题的关键在于, 若不存在重力加速度, 子弹直线飞行将击中动物. 而子弹和动物都受到相同的重力加速度, 因而都从它们本来应该在的地方以相同速度下落. 所以, 若子弹瞄准动物, 重力加速度对它们的作用是使他们在动物初始位置下方的某个地方相遇, 见图 1-5(b).

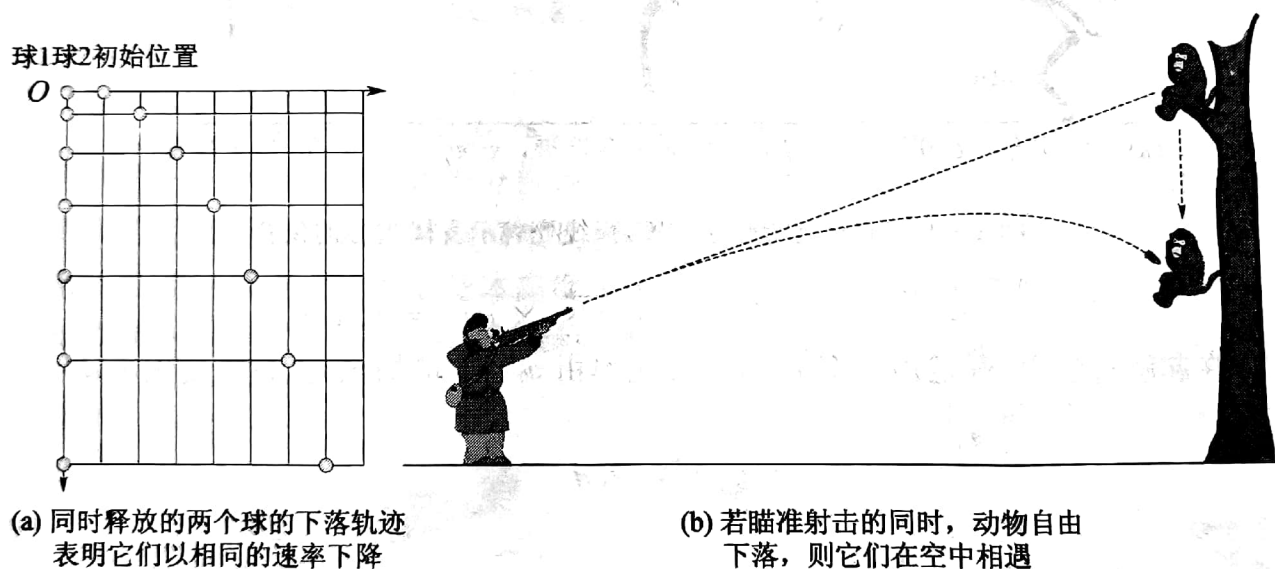


图 1-5

在竞技运动和动物运动中抛射体运动有许多应用. 下面我们讨论几个例子.

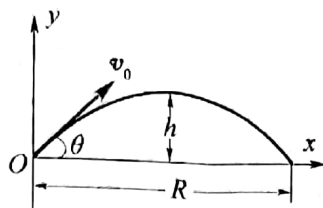
在抛射体运动的应用中, 求出水平运行距离, 即射程 R 的公式会带来计算方便. 考虑从地面发射的一个抛射体(见图 1-6). 着地处 y 坐标为 0, 一旦求出着地时刻 t , 就可从 x 方向的运动方程求得射程.

由 $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, 取 $y = y_0 = 0$, 得

$$0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

这个方程的解为 $t = 0$ (对应发射时刻) 和



图 1-6 抛射体以与水平方向成 θ 角的速度 v_0 发射, 其射程为 R

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}$$

这是抛射体着地时刻, 将它代入 $x = v_{0x}t$, 则射程为

$$R = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

若抛射体的初速度与地面所成的发射角为 θ , 则 $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ 和 $v_{0y} = v_0 \sin \theta$, 于是射程可表示成

$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

或

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (1-9)$$

以一个踢出的足球为例子说明该结果的几个重要特征. 若垂直向上踢球, $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$, 球在空中持续一段时间, 其水平射程为零. 同样, 若 $\theta = 0^\circ$, $\sin \theta = 0$, 则射程也为零, 但此时球立即碰地.

假定以 30° 踢出足球, 射程为 $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 60^\circ$. 若以 60° 踢出, 射程为 $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 120^\circ$. 两个射程相等. 然而, 以较陡的 60° 踢出的球将升得更高, 在空中停留较长时间. 因而足球运动员用高踢法能使队友有更多时间赶到落地点. 一般而言, 从地面上以相同的初速率朝 θ 和 $90^\circ - \theta$ 出射的抛射体具有相同的射程. 但是较大的发射角会导致更高的飞行路径和更长的飞行时间.

因为 $45^\circ = 90^\circ - 45^\circ$, 所以 45° 发射角是一个特殊情况. 对于给定的初速率, 当发射点和着地点处于相等高度时, 45° 具有最大射程. 然而, 当发射点较高时, 则在小于 45° 的发射角具有最大射程. 反之, 当着地点较高, 则在大于 45° 的发射角具有最大射程.

在 1.1.2 节中, 我们以匀加速直线运动公式来分析动物的垂直跳跃. 与此类似, 可以用抛射体运动公式来讨论水平跳跃. 蛙和袋鼠是靠跳跃行进的, 在逃避天敌时必须跳得尽可能远, 假如跳得太低或跳得太高都跳不远. 从实际观察的结果来看, 为了跳得最远, 它们确实是以 45° 跳开的.

例 1.5 设青蛙一次最远能跳 90 cm, 跳鼠一次最远能跳 370 cm, 试比较它们的初速度.

解 因为 $\theta = 45^\circ$, 故 $R = \frac{v_0^2}{g}$.

对青蛙:

$$v_0 = \sqrt{Rg} = \sqrt{0.9 \times 9.8} \text{ m/s} = 2.97 \text{ m/s}$$

对跳鼠:



$$v_0 = \sqrt{Rg} = \sqrt{3.7 \times 9.8} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

例 1.6 试比较上题中的两种动物跳得最远时可达到的最大高度.

解 在最高点时, 铅直速度 $v_y = 0$. 由 $2as = v_f^2 - v_0^2$, 取 $a = -g, s = y$, 则

$$-2gy = -(v_0 \sin \theta)^2$$

所以

$$y = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

对青蛙:

$$y = (2.97 \text{ m/s} \times \sqrt{2}/2)^2 / (2 \times 9.8 \text{ m/s}^2) = 0.23 \text{ m}$$

对跳鼠:

$$y = (6 \text{ m/s} \times \sqrt{2}/2)^2 / (2 \times 9.8 \text{ m/s}^2) = 0.92 \text{ m}$$

虽然对一定的初速率, 45° 导致平面上的最大跃程, 但动物或许习惯于以其他的角度跳跃, 这是由于它们的某种需要或者结构上的原因. 例如, 蝗虫往往要跃入空中然后开始飞行. 在这种情况下, 跳跃的距离显然无关紧要, 而空中停留时间却颇为重要. 不论是否开始飞行, 蝗虫通常以约 55° 起跳.

例 1.7 若蝗虫的起飞角为 55° , 跃程为 0.8 m , 试求其起跳速率.

解 由 $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$, 且 $\theta = 55^\circ$, 所以

$$v_0 = \sqrt{Rg / \sin 2\theta} = \sqrt{0.8 \times 9.8 / 0.94} \text{ m/s} = 2.9 \text{ m/s}$$

1.2 动力学和牛顿运动定律

运动学给出运动的数学描述, 动力学则提供那个运动的根源或“动力”. 例如, 伽利略运动学描述一切落到地面的物体(忽略空气阻力)具有相同的加速度. 而牛顿动力学告诉我们这是“重力”作用的结果, 还可用来推断诸行星在宇宙中的轨道和运动.

从运动学到动力学的巨大进展是由牛顿取得的. 他的运动三大定律叙述简单而意义深刻. 运动三大定律的作用只有在它们被广泛应用于多种力学实例后才显露出来.

1.2.1 牛顿第一定律(惯性定律)

任何运动的物体均反抗对其原有运动的改变, 如在下坡时使一个雪橇转弯比让它直线行进要困难得多. 另外, 一个物体越重, 反抗改变其运动的作用也越显著. 任何物体的这种性质称为惯性(inertia), 牛顿第一定律就是阐述惯性的效果.

牛顿第一定律: 一个物体除非受净外力迫使它改变状态, 否则将保持静止或匀速直线运动状态.

这样叙述的牛顿第一定律存在一个问题, 即它没有说明用于测量运动的坐标系. 静止或匀速运动这些名词仅在某些特定的坐标系是正确的. 因而, 我们把牛顿第一定律成立的坐标系称为惯性坐标系或惯性参考系.



1.2.2 牛顿第二定律

牛顿第二定律把物体的运动和作用于其上的各力联系起来. 当物体受到一个合力时, 该物体就要沿这个合力的方向作加速运动. 加速度的大小与这个力的大小成正比, 即如果作用于某一物体上的力加倍, 那么它的加速度也加倍. 牛顿第二定律的数学表达式为

$$F = ma \quad (1-10)$$

比例常数 m 就称为物体的质量. 一个物体的质量是它所包含的物质数量, 也是其惯性的量度.

1.2.3 牛顿第三定律

牛顿第三定律是与两个物体之间相互施加的作用力有关的规律. 在日常生活中, 我们对它是很熟悉的. 例如, 在游泳池中, 如果用脚蹬池壁的话, 那么池壁也施加一力于脚, 从而把身体推向池子中央. 池壁对脚所施加的反作用力在正方向上与脚施加于池壁的作用力相反. 同样, 在步行时, 脚必须对地面施加一个向后的力, 而地面则反过来给脚一个向前的推力. 牛顿总结道: “对于每个作用, 总是存在着一个相等相反的反作用; 或者说两个物体彼此间的相互作用总是相等的, 而方向指向对立的那一个.” 这个关系就称为牛顿第三定律, 不论人和物体是否在作加速运动, 它都是成立的. 两个物体之间相互作用的这两个力就称为作用力和反作用力. 牛顿第三定律的普遍表述如下: 对于任何作用力都存在大小相等方向相反的反作用力.

值得强调的是, 作用力和反作用力是作用在不同物体上的, 因此它们的效果并不会抵消. 例如, 马向前拉车时, 马也同时被车向后拉, 而它们却同时向前运动, 是因为车和马受到的合力都是向前的. 也就是说, 只有作用在某一物体上的各个力的矢量和才能影响它的运动状态.

牛顿运动三大定律是关于物理世界的非常基本的表述. 力学的全部内容可以看做是牛顿定律在各种力学系统中直接或间接的应用. 当然, 求解力学问题还要加上描述作用于特定情形的力的特性, 如万有引力、电磁相互作用力的形式等. 这就构成经典力学的完整基础.

1.2.4 物理学中的基本力

在结束力学基本定律的表述时, 必须详细说明作用于物体之间各种力的特性. 这些力可分为两大类: 基本力和派生力. 基本力代表最少的、独立的基本相互作用, 从它们派生得到所有余下的“派生力”.

物理学中的基本力有四种: 引力、电磁力、“强”核力和“弱”核力. 派生力包括重力、摩擦力、弹性力和粘滞力等, 所有这些力都能由基本力派生出来.

在这四种基本力中, 我们通常关心的只是前两种. 后两种核力是极短程的力, 它们只在原子核距离以内才起作用, 它们决定了原子核的结构和稳定性, 除此之外, 它们与宏观现象并无直接关系.

引力和电磁力是各种自然现象的根源. 牛顿系统地阐述了万有引力定律. 这条定律说, 宇宙中一切物体都互相吸引. 万有引力最壮观的效果出现在天体的运动中.

牛顿对万有引力定律的表述: 在两个点状物体 1 和 2 之间, 存在一个沿连线方向的引力作



用,大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1-11)$$

式中, G 称为引力常数, 其测量值为 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

万有引力的大小随 $1/r^2$ 而变, 所以式(1-11)称为平方反比定律. 式(1-11)可直接用于质点或球的情形. 对于比较复杂的物体, 需要把两个物体的每一微小部分(质元)之间的引力都加起来, 以求出两个物体之间的净引力. 正如牛顿第三定律所要求的那样, 这些净力仍然是大小相等、方向相反的.

物体的重力是它所受到的万有引力. 对于地面附近的物体来说, 这个力主要就是地球的引力. 在月球上, 重力要小得多.

设地球的半径为 R , 质量为 M . 地面上质量为 m 的物体受到的重力为

$$F = G \frac{mM}{R^2}$$

这个力所产生的加速度 g 可由牛顿第二定律求出, 即

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M}{R^2}$$

这个结果表明, 对所有物体来说, 重力加速度都相同. 注意, 地球的半径 R 是 6 400 km, 因此地面上几米至几千米内的重力加速度和其地面的值 9.8 m/s^2 没有显著的差别.

重力在医学上的重要影响之一是, 当静脉血反抗重力流向心脏时, 重力会引起腿部静脉曲张. 在医学上, 另一个受重力影响的是骨骼, 作用于骨骼的重力在某种程度上对骨的健壮起着一定作用. 一个人处于“失重”状态(如有人造卫星中), 其骨骼会失去一些无机物, 这对于长时间的宇宙航行将是一个严重的问题. 长期卧床会消除体重作用于骨骼上的大部分力, 将导致严重的骨损失.

第二种基本力是电磁力. 这个力比重力要复杂得多, 它关系到静电荷之间的引力和斥力, 以及运动电荷(电流)所产生的磁力. 电磁力比起重力来是非常巨大的. 例如, 氢原子内质子和电子之间的电磁力比起它们之间的引力大约大 10^{39} 倍. 前面提到的各种派生力, 如摩擦力、弹性力和粘滞力等, 实际上正是由电磁力所派生出来的. 同样, 人或动物体内的肌肉收缩的力, 也属于电磁力, 肌肉收缩产生的力是由于某些电荷对其他一些电荷的吸引或排斥引起的. 我们将在后面的电磁学知识中专门讨论电磁现象.

1.2.5 摩擦和动物运动的关系

任何时候, 当固体在一个表面上滑动时, 总有摩擦力阻碍其运动, 这是由于粗糙表面的凹凸不平, 或是光滑表面的分子吸附力引起. 分子吸附力会产生很强的摩擦力, 如把一个光滑的铜块放在一块光滑的铜板上, 直到铜板都接近垂直时, 铜块仍能不下滑. 由实验可得, 摩擦力的大小与接触面上的正压力成正比, 即

$$F = \mu N$$

式中, μ 称为摩擦系数(coefficient of friction), 它是一个表征接触面粗糙程度的比例常数.

对于滑动的物体, $\mu = \mu_k$, 称为动摩擦系数(coefficient of kinetic friction). 如应用于静止的两物体, $\mu = \mu_s$, 称为静摩擦系数(coefficient of static friction). 对两个相同的表面, 其 μ_s 常大于 μ_k . 如果没有这种摩擦力, 车辆的运行或人体的步行等各种运动都不可能发生. 步行中,



人体之所以能向前运动,是由于腿的肌肉使腿向后蹬地,这个作用受地面摩擦力的反抗.没有摩擦,也就不可能走动,当行走在冰面上时能体会到这一点,因为冰面上的摩擦很小.

在物理学和生物学中,摩擦力是非常重要的.从物理的观点来看,除发生在真空中的运动外,任何物体的运动都有摩擦存在.在某些情况下,摩擦是必需的(如汽车刹车);在另一些情况下,则不希望有摩擦(如水对船身运动的阻碍).在生物学中,任何形式的运动都与摩擦力有关,在地面上能够走、跑、爬,这都是因为与之接触的地面存在摩擦的缘故.在气体(如空气)或液体(如水)中运动,阻碍运动的摩擦力被称为阻力(drag force).鸟在空中飞或鱼在水中游都要受到阻力,其大小决定于介质的性质、运动体的形状以及运动体相对于介质的速度等.例如,一个玻璃珠落入一个盛蜂蜜的罐,其阻力与玻璃珠的速度成正比.对更快的运动,如飞鸟和游鱼,阻力可假定与速度的平方成正比.

1.2.6 牛顿定律的应用举例

牛顿第二定律对研究瞬时碰撞(即冲击)的效果是很有用的.从公式(1-2)可得

$$F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$$

乘积 mv 称为线动量(linear momentum) p ,它是一个矢量.因此牛顿第二定律可表示为

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

此式说明作用于一个物体的净外力等于它的动量随时间的改变率.事实上,这正是牛顿最初表达这条定律的写法.乘积 $F\Delta t$ 称为冲量(impulse).此处考虑的情况是假设 Δt 为一很短的时间间隔($\Delta t \leq 1$ s),因此 F 是指在这个时间间隔内对物体的平均作用力.

例 1.8 一个人以 1 m/s 的速度步行时,头碰在一根很低的横梁上,碰撞的持续时间 5 ms,若头的质量为 4.5 kg,求碰撞时头部所受的平均作用力.

解 头部的动量变化为

$$\Delta(mv) = 4.5 \text{ kg} \times (1 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}) = 4.5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以平均作用力大小为

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4.5}{0.005} = 900 \text{ N}$$

这些是真实条件下得到的数据,所以这样的碰撞对头的损伤很大.

如果一个人从 1 m 高处跳下且着地时腿是伸直的,他将受到冲击.在人着地的瞬间,其速度是 4.5 m/s,设鞋底在 5 ms 内压缩 0.5 cm 使人体停止,此时腿所受的力约是其体重的 100 倍.如果人体落在体操垫上,其减速时间会更长一些;如果他按照人体的正常反应,先将其脚尖着地然后弯曲膝部,使减速时间加长,从而减少了着地时的冲击力.

因为现代车辆的速度大,乘客的动量比起步行时的动量要大得多.遇到意外时,汽车在短时间内停下来,从而产生非常大的力.这样大的力作用的结果是骨折,内部受伤,甚至死亡.再考虑乘坐汽车从后面被撞而引起的颈部受伤,当车被碰撞时,力通过座位使人的躯干向前,而惯性却使头部停留在原位,这就使其颈部受到严重的拉伸.几毫秒内,头部又被迫加速向前,因此导致颈部受伤.目前,在汽车中加装头垫,以减少此类受伤.汽车的座位带有助于减少意外伤害,但拴着座位带的人头部仍可能碰撞仪表盘而受严重伤害.因此,除仪表挡板与方向盘有软垫外,汽车设计有安全气囊,紧急情况下弹出,能有效减少伤亡.



人体在加速和减速力作用下的行为,对于和太空飞行器、飞机、汽车等有关的人员来说是饶有兴趣的领域.在游乐场乘坐飞行玩具时,人们都感到加速的效应.人体经受得起的加速度的量值取决于人体的方位和加速度的持续时间.加速度可能产生若干种效应,如超重或失重,体内静压的改变,人体弹性组织扭变和悬浮在液体中不同密度的固体成分分离.如果加速度增加到足够大时,人就会失去控制,因为他不具备适当的肌力以抵抗较大的加速力.如果头部受到向上加速,则大脑因缺少血液引起眩晕及失去知觉.人体组织可能因加速力而扭变,如果力足够大,可能破裂或断开.实验资料是稀少的,但在高速离心机进行的一些实验中,可以看到,在加速力作用下,组织可能被拉长,以至于拉断.

上面讨论的是直线加速和减速运动中的力对人体的作用,如果让人体振动,就有可能发生共振现象.我们的每个主要器官都有其固有频率,这个频率决定于它的质量和加于它的各种弹力.如果一个器官共振于它的固有频率时,生理上就会产生痛苦和不适感.过度振动时常出现于摩托车,它会引起疲倦与烦闷,还可能引起视觉障碍,摩托车的振动频率常在 8 Hz 或以下(参见第4章振动和波、声).

1.3 静 力 学

静力学主要研究作用在处于平衡或静止状态的物体上的力.尽管没有运动,但关于这些力也存在许多重要问题.例如,计算作用在工程结构如桥梁、建筑物中各部分的作用力,或者是生物结构如人体关节上的作用力.通过静力学我们可以了解由简单机械得到的力的放大作用,如在人体的骨骼系统中可找到很多杠杆.静力学也可解答物体及动物的平衡和稳定问题.静力学能够解答的问题范围很广,使得它在工程、比较解剖学、物理疗法和牙齿矫正术等广泛的领域中都有重要的应用.

1.3.1 力矩与转动平衡

在考虑静力学的应用之前,必须先讨论刚体平衡的条件.刚体是指具有固定形状及大小的物体,如一个垒球或一块骨头.如果是一个质点,其平衡条件很简单,即其受到的各力之和为零.然而对于刚体而言,即使合力为零,它也可能运动.一个简单的例子如下:作用在木棒两端的两个力大小相等,方向相反(见图1-7).虽然它们的矢量和为零,但实际上物体仍然会转动.木棒的“质心”将静止不动,但棒围绕其中心转动,我们称此时存在“力矩”.因此,力矩之和为零是刚体平衡所必须具备的第二个条件.这个条件是阿基米德(Archimedes, BC 287 ~ BC 212)发现的.

现在考虑力对物体的转动效应的数学描述,即力矩的表示式.以一个可绕轴转动的扳手为例(见图1-8),当我们用扳手拧螺母时,扳手绕O点旋转,其转动效应不仅与力 F 的大小有关,而且还与 F 离O点的距离及力的方向有关,作用力离转轴越远越容易使其转动.我们将此因素定义为力臂,即转轴到力的作用线的垂直距离.图1-8中所示 F 的力臂是 d .

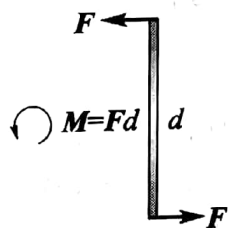


图1-7 木棒所受合外力为零时的运动情况

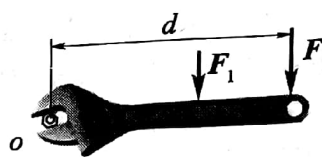


图1-8 力的转动效应



绕已知转轴(不论是固定轴或是瞬时轴)的力矩(torque) M 定义为下述矢量叉积(vector cross product)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

此处 $\mathbf{r}$ 是从转轴到 $\mathbf{F}$ 作用点的位矢,力矩的单位是 $\text{N} \cdot \text{m}$.力矩 $\mathbf{M}$ 是矢量,其大小为 $rF \sin \theta$,此处 θ 是 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{F}$ 所夹的锐角,当 $\mathbf{r}$ 是沿 θ 方向旋转到 $\mathbf{F}$ 时,则 $\mathbf{M}$ 的方向由右手螺旋法则确定,如图1-9所示.

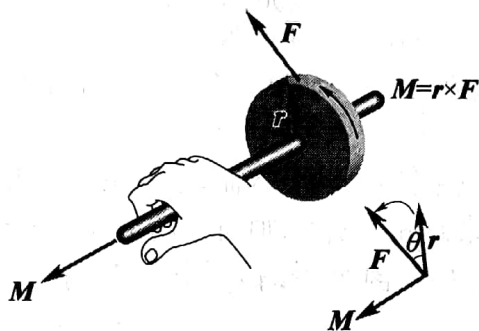


图1-9 力矩($\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$)的方向说明

1.3.2 刚体的平衡

由1.3.1节讨论可知,一个刚体的平衡有两个条件:①作用于物体上的合力为零, $\mathbf{F} = 0$.此时,这个物体作为整体来说没有加速度,即它的质心保持静止,也称物体处于平移平衡;②对任意选定的点计算得到的作用于物体上的合力矩为零, $\mathbf{M} = 0$.此时物体没有绕某个轴的旋转运动,称物体处于转动平衡.

应用这些条件的一个熟悉例子是两个孩子在跷跷板上的平衡问题(见图1-10).如果两个孩子重量不等,那么为了平衡,他们立即会发现较重的孩子必须坐在更靠近轴的位置上.例如,一个孩子的体重是另一个孩子的两倍,那么这个孩子必须坐在离轴距离为一半的地方.

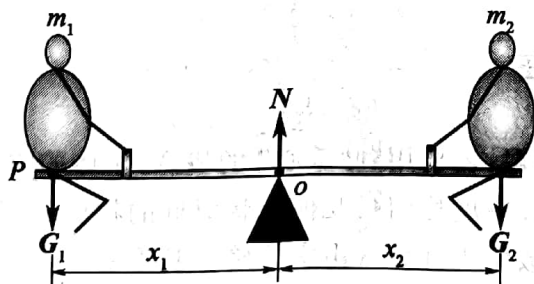


图1-10 两个孩子在跷跷板上平衡时,较重的孩子必须更靠近枢轴

例1.9 两个重量分别为 G_1 和 G_2 的孩子在以木板的重心作为枢轴的木板上处于平衡.问(1)两个孩子离枢轴的距离之比 x_1/x_2 是多少?(2)若 $G_1 = 200 \text{ N}$, $G_2 = 400 \text{ N}$ 和 $x_1 = 1 \text{ m}$,则 x_2 是多少?

解 (1)根据平移平衡条件,由支点 O 施加的力 N 必须与两个孩子的重量平衡,即合力为零

$$N = G_1 + G_2$$

根据转动平衡条件,即合力矩为零.计算各力相对于支点 O 的力矩,由于力 N 的作用线通



过O点,所以力臂为零,即力矩为零.由体重产生的两个力矩分别为 $M_1 = x_1 G_1$ 和 $M_2 = -x_2 G_2$. 于是,由 $M = M_1 + M_2 = 0$,得 $x_1 G_1 - x_2 G_2 = 0$,即

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{G_1}{G_2}$$

这个式子就是当跷跷板平衡时位置 x_1 和 x_2 之间必须满足的关系式.

(2) 若 $G_1 = 200 \text{ N}$, $G_2 = 400 \text{ N}$ 和 $x_1 = 1 \text{ m}$, 则有

$$x_2 = \frac{G_1}{G_2} x_1 = \frac{200 \text{ N}}{400 \text{ N}} \times 1 \text{ m} = 0.5 \text{ m}$$

这个结果与我们最初的叙述一致,即如果一个孩子的重量是另一个孩子的两倍,那么他必须坐在离轴距离一半的地方.

在例 1.9 中,我们选择支点来计算力矩.然而,平衡条件告诉我们,相对于任一点计算的力矩之和也必须为零.下面我们求解同一例题,但对不同点计算力矩,最后会发现结果是相同的.

对例 1.9,我们计算相对 P 点的力矩,该点是重量为 G_1 的孩子所处的位置,然后再求 x_2/x_1 .

N 和 G_2 对 P 点产生的力矩分别为 $x_1 N$ 和 $-(x_1 + x_2)G_2$; G_1 的力矩为零.平衡时,合力矩为零,所以

$$x_1 N - (x_1 + x_2)G_2 = 0$$

同时,合力必须为零,即

$$N = G_1 + G_2$$

将 N 代入,得到

$$-(x_1 + x_2)G_2 + x_1(G_1 + G_2) = 0$$

所以,得到相同结果

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{G_1}{G_2}$$

这个例子说明不论选择哪一点来计算力矩,结果是相同的.而巧妙地选择计算力矩的点可以简化我们的计算.例如,选择轴上支点可在力矩方程中消去未知的法向力 N .

1.3.3 平衡与稳定性

为讨论平衡和稳定性问题,需要用到“重心”的概念.刚体的重心是指这样的点,即刚体的重量可以认为集中在该点上.密度均匀且几何形状对称的物体的重心位于它们的几何中心.对于形状不规则的物体,可从数学上计算或由实验确定其重心.

一个悬挂着物体的重心总是在悬点的正下方.这是因为在其他位置重力对悬点的力矩将不为零.这种观察接提供了在实验上确定重心的一种方法.把物体悬挂在某一点 P_1 上,当物体平衡时,其重心位置在通过悬点 P_1 的竖直线上.再把物体悬挂在第 2 个点 P_2 上,则其重心也位于通过 P_2 点的竖直线上,从而物体的重心就位于两条直线的交点上(见图 1-11).

物体的重心并不总是位于该物体内部,如一个足球的重心位于其几何中心上.上肢或下肢的重心取决于其组成部位的相对姿势,如屈膝(屈肘)时,重心就可能在肢体之外.由两部分组成的连接体重心总是位于它各组成部分重心的连线上.

“重心”是理疗中的重要概念.在正常情况下,我们并不意识到它存在,但当足、腿或臀部



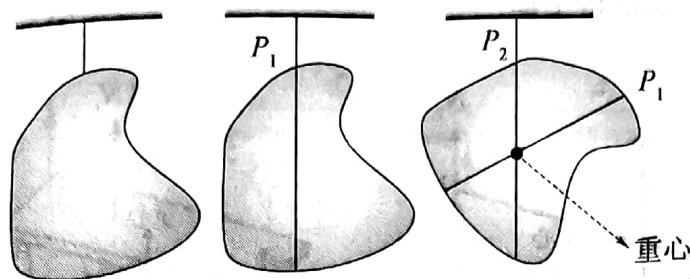


图 1-11 刚体的重心

肌肉受伤而失去正常的支撑时,我们就通过改变姿势来移动其负荷,从而使绕重心的净力矩为零.人站立时,其重心位于盆部(第二骶椎之前).人弯腰时,他的身体向后移动以保持其重心落于足上,否则由于重心前移,相对于足部将有一净力矩使人倾倒.

例 1.10 如图 1-12 所示,一个直立的体重为 60 kg 的人,当他提着 15 kg 的重物时,求重心位置需移动的距离.在实际生活中这种移动是怎样完成的?

解 由重力 G 引起的附加力矩应为

$$M = G \times 0.3 \text{ m} = 15 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.3 \text{ m} = 44 \text{ N} \cdot \text{m}$$

它需要一个相反的力矩 $F \times x$ 予以抵偿,此处 F 是人的体重, x 是所需的力臂,因此

$$60 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times x = 44 \text{ N} \cdot \text{m}$$

则

$$x = 7.5 \text{ cm}$$

即需要将身体重心向重物对侧移动 7.5 cm. 实际中是靠弯曲上身并将另一侧上肢抬高来维持平衡. 这些动作使上身的重心沿一定方向移动,这个方向正是提供必需的相反力矩所要求的. 当提一桶水时,会不自觉地做这些动作.

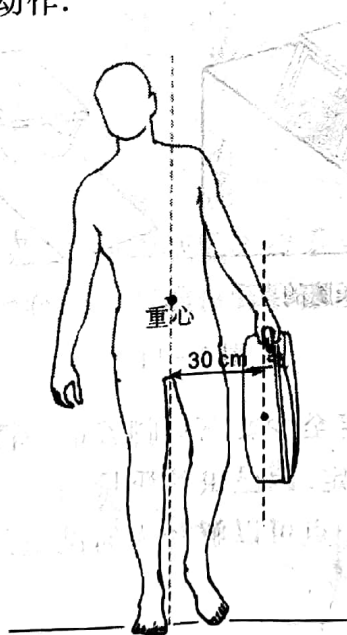


图 1-12 手提重物的人为保持平衡,上身必须向另一侧倾斜

动物腿的数目与位置显然部分是由它的稳定性和平衡方面的要求来确定的. 图 1-13 中用横梁来说明这一基本观点. 如果重心位于两支点之间,那么 N_1 和 N_2 对重心产生的力矩方向相反并互相抵消,因此横梁平衡. 然而,要是重心在支点左边时,则 N_1 和 N_2 对重心产生的力矩都是正的,合力矩不为零,所以横梁会翻倒. 因此结论是,仅当物体的重心位于由它的支点所确定



的基面的上方时,物体才能保持平衡.

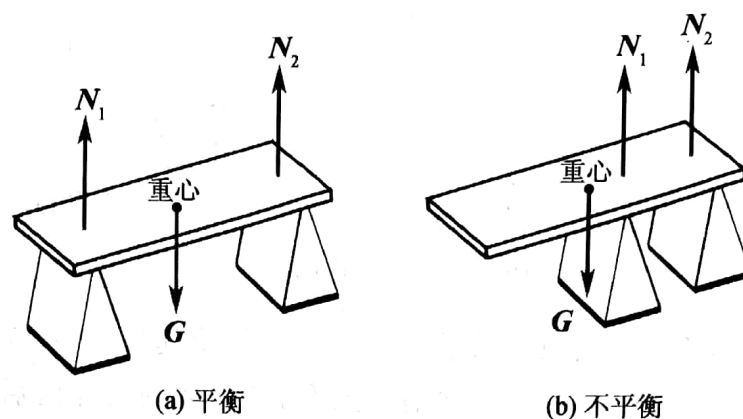


图 1-13 横梁

四足动物类似于一张桌子. 若将放桌子的面不断倾斜, 只要桌子的重心不再落在四条桌腿支持点所限定范围的正上方时, 桌子就会翻倒(见图 1-14). 对一定大小的桌面而言, 桌腿越短, 则要使它翻倒的角 θ 也越大, 因此就具有更大的稳定性. 因此我们可看到, 腿较短的老鼠和松鼠适宜在陡峭的斜坡上或树枝上很好地活动, 而腿比较长的马和羚羊则适于在平地奔跑. 如果一只四足动物提起一条腿, 只要它的重心落在其余三条腿所构成三角形的基面内, 那么它仍可保持平衡. 动物如果按正确顺序挪动它的腿, 当三条腿总是保持在地面上并且让质心处在这三条腿确定的三角形的上方时, 它就可以缓慢地走动. 这个顺序是: 右前腿、左后腿、左前腿、右后腿. 所有四足动物和婴儿都采用这样的顺序. 当然, 人、鸟和某些动物可以依靠一足或两足平衡, 这是由于其足较大, 所以能够比较容易达到平衡.

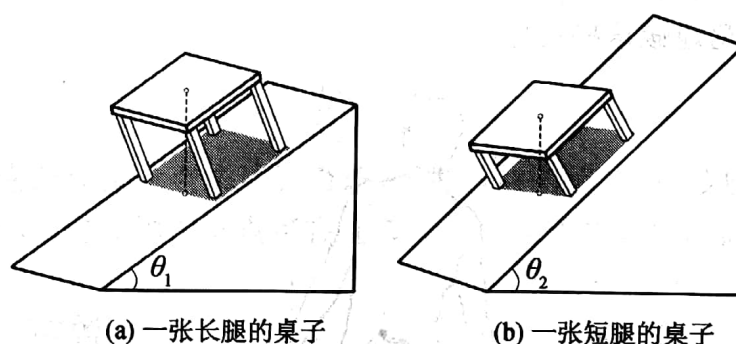


图 1-14

对于足小的动物来说, 为了稳定至少要三只脚着地. 所以具有六条腿的昆虫可以三条腿同时移动而仍然在所有时间内保持稳定. 因昆虫的质量很小, 所以如果它们处于不稳定状态, 那么即使微风也可以把它们吹倒. 这一点可以解释为何昆虫的腿不再像哺乳动物那样垂直指向地面, 而是向外张开.

1.3.4 杠杆及其机械利益

杠杆是绕定点转动的刚体棒, 这个定点称为支点(fulcrum)或轴. 杠杆是最古老, 也是现在仍然常用的简单工具. 根据施力点、负荷作用点和支点间的相对位置, 可将杠杆分为第一、第二和第三类, 如图 1-15 所示. 撬棍属于第一类杠杆; 独轮车是第二类杠杆; 而如我们将看到的, 动



物的四肢是第三类杠杆的例子。

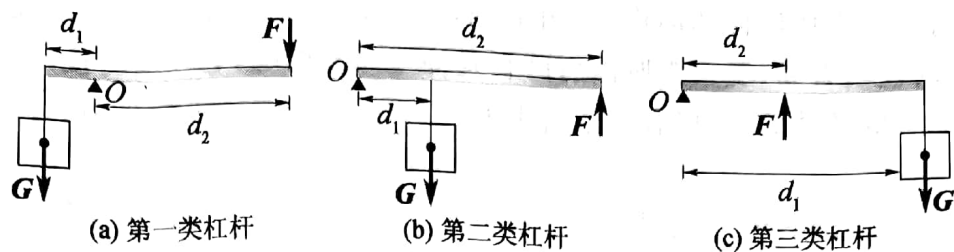


图 1-15 三类杠杆的图示

由 1.3.2 节刚体的平衡条件可得,平衡负载所需的力 F 满足

$$F = G \frac{d_1}{d_2}$$

d_1 和 d_2 分别为负载作用力和施加力的力臂,如图 1-15 所示.定义杠杆的机械利益(mechanical advantage) η 为

$$\eta = \frac{G}{F} = \frac{d_2}{d_1}$$

若 d_1 小于 d_2 ,平衡所需的施力 F 小于负载 G ,此时机械利益 $\eta > 1$,称为省力杠杆;反之,则 $\eta < 1$,为费力杠杆.第一类杠杆中,随支点位置改变,从靠近负载到靠近施力端, η 相应从大于 1 变为小于 1.第二类杠杆机械利益总是大于 1.对于第三类杠杆, $\eta < 1$,即为费力杠杆.

我们以第一类杠杆为例考虑负载端的位移、速度和杠杆机械利益的关系.如图 1-16 所示,在恒力 F 的作用下,杠杆绕支点转动,假定运动是匀速的.施力端下降距离和速度大小分别为 L_2 和 v_2 ;负载端上升距离和速度大小分别为 L_1 和 v_1 .由简单的平面几何关系知

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

和

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

这个结果对于三类杠杆都是成立的.所以我们可以看到,负载的位移和速度反比于杠杆的机械利益.也就是说,对 $\eta < 1$ 的杠杆,负载端的位移和速度较大.

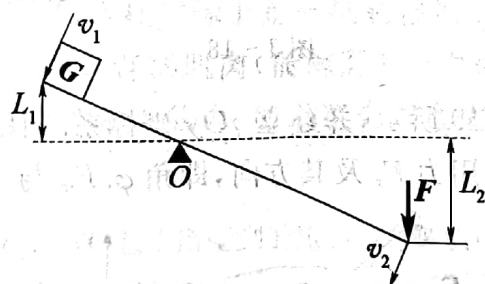


图 1-16 杆臂的运动

1.3.5 身体中的杠杆

人体的很多肌肉和骨系统起着杠杆作用.在人体内最常见的是第三类杠杆,第二类杠杆次之,最少的是第一类杠杆.



骨是受肌肉作用的杠杆. 由于肌肉只靠收缩产生的张力对骨施加作用, 这就至少需要两块肌肉作用在前臂骨以完成屈伸的动作, 如图 1-17 所示. 肱二头肌由肩胛骨经过肱骨前方连接于桡骨, 它收缩时使前臂屈; 肱三头肌由肩胛骨延伸至尺骨鹰嘴, 它收缩时使前臂伸. 尺骨与肱骨之间是一个简单的铰链关节, 仅有一个自由度. 图 1-17 中对于手臂肌肉的说明并不完全.

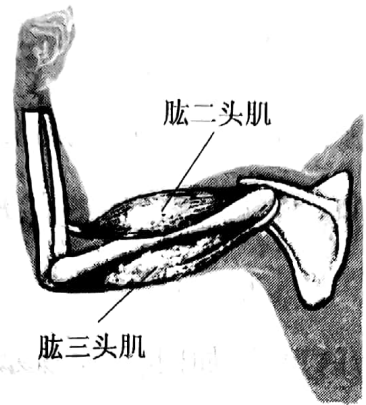


图 1-17 肱二头肌使前臂屈, 肱三头肌使前臂伸

我们以肘部为例来讨论一个简单的杠杆系统, 即手持重物的情形. 这时起作用的是肱二头肌和桡骨, 肘为支点, 负载在另一端, 属于第三类杠杆.

例 1.11 如图 1-18 所示, 一个人手持一重 14 kg 铅球, 前臂保持水平, 臂的尺寸及角度由图 1-18(b) 中给出, 试求肱二头肌产生的力和关节处尺骨的受力.

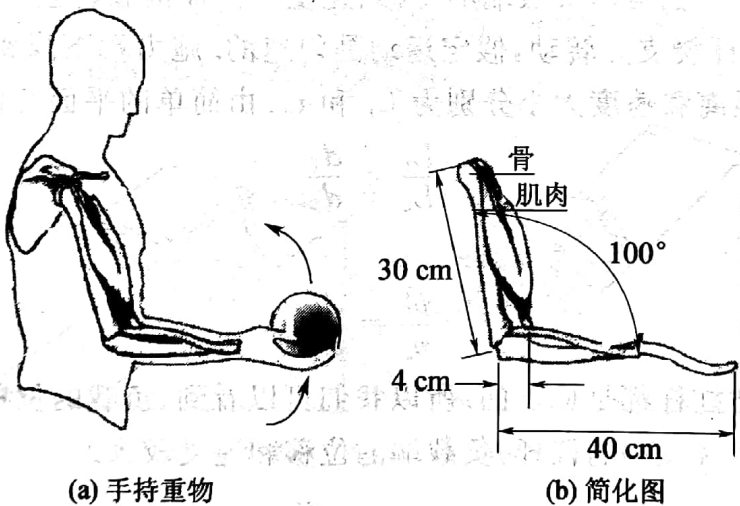


图 1-18

解 其杠杆表示如图 1-19 所示, 并建立 xOy 坐标系. 问题中有 3 个未知量: 肱二头肌产生的力 F_m , 支点(关节)处的作用力 F_r 及其方向, 即角 φ . F_m 与 x 轴的夹角 θ 是一个确定值, 可

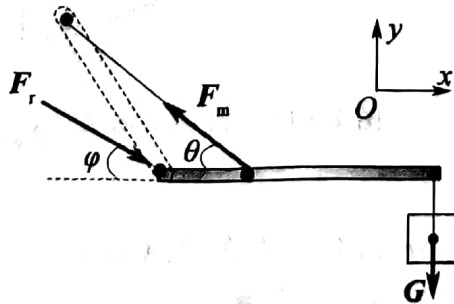


图 1-19 图 1-18 的杠杆表示



由三角几何知识计算出,可得 θ 等于 72.6° .

由力的平衡条件,得到力的 x 分量:

$$F_m \cos \theta = F_r \cos \varphi \quad (1-12)$$

力的 y 分量:

$$F_m \sin \theta = F_r \sin \varphi + G \quad (1-13)$$

由上面两个方程求解 3 个未知量是不充分的. 当然,我们还未使用力矩的平衡条件,即杠杆平衡时,对任何一点的合力矩为零. 为方便,选择支点计算力矩. 对该点有两个力矩:球的重力产生一顺时针力矩, F_m 的 y 分量产生一逆时针力矩. 由于关节处的力 F_r 作用于支点上,所以不产生力矩.

由所给长度数据可得

$$4 \text{ cm} \times F_m \sin \theta = 40 \text{ cm} \times G$$

又已知 $\theta = 72.6^\circ$,代入得

$$F_m = 10.5G$$

即 F_m 是重力的 10.5 倍. 若 $G = 137.2 \text{ N}$, 则

$$F_m = 1440 \text{ N}$$

将其代入式(1-12)和式(1-13),可求得

$$F_r = 1320 \text{ N}, \quad \varphi = 71^\circ$$

上例在简化问题时,忽略了前臂和手的重量. 这个重量不均匀地分布在整個前臂和手上,计算时更好的方法是求出其重心位置. 前臂和手的重量 H , 典型值为 15 N , 由于重心靠近中间位置,求绕关节的力矩和,可得 $F_m = 10.5G + 5.2H$, 这意味着肱二头肌的张力必须大于第一次计算值. $5.2H \approx 78 \text{ N}$, 数值差别不大.

上例计算的结果表明,肌肉和关节处产生的力很大. 事实上肌肉产生的力远大于手部承受的(其 10 倍多). 身体内所有骨骼肌的情形都如此,它们产生的力作用于机械利益小于 1 的杠杆. 如 1.3.4 节中提到的,这样的设计可以给肢体提供更大的速度. 肌肉长度的较小变化可以引起肢端相对较大的位移. 看上去大自然更喜欢速度,而非力量. 另一个原因是,若要省力就需要较长的力臂,而这对骨骼系统来说是很难办到的.

下面考虑人在弯腰提重物时背部的受力问题. 人的脊柱由 24 块椎骨构成,椎骨之间被充满液体的椎间盘隔开. 当人弯腰时,脊柱实际上是机械利益很小的杠杆(见图 1-20). 因此在弯腰提重物时,即使是很轻的物体也须背部肌肉(骶棘肌)产生很大的力,同时在第五腰椎的椎间盘(第五腰椎与骶骨间)上产生非常大的力,如果这个力太大,就可能使椎间盘破裂或变形,因而压迫附近神经并引起剧痛.

L_5/S_1 椎间盘上所受到的压力与背部肌肉

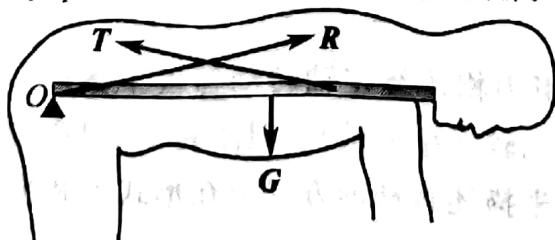


图 1-20 背部呈水平状态时的脊柱受力情况



为了了解这个力为什么如此之大,我们考虑一个弯腰的实例.对此可采用一个模型,如图 1-21 所示.支点 A 在第五腰椎或骶骨处,并设作用于第五腰椎的力为 R .杆 AB 表示整个脊柱.躯干的重量均匀分布于背部,等效为悬挂在中点的负载 G_1 .头和手臂的重量表示为悬挂于杠杆末端的负载 G_2 .背部各块肌肉产生的力用连接 DC 的绳子来等效, D 点位于脊柱长度三分之二处.设肌肉产生的力为 T ,与脊柱所成的夹角 α 为 12° .考虑 70 kg 的人, G_1 和 G_2 的代表值为 320 N 和 160 N .

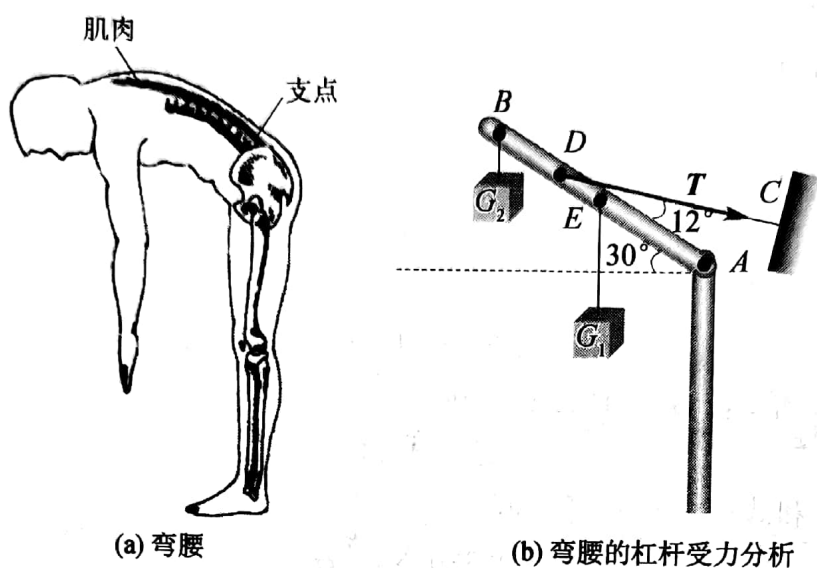


图 1-21

首先作一个定性分析.注意到因为 α 角很小,即 T 的作用线很靠近支点,所以其力臂 r_T 很短.而重量 G_1 与 G_2 的力臂较长(数倍于 r_T),为了与重量 G_1 和 G_2 的力矩平衡,肌力 T 必然远大于体重.

如果弯腰仅仅是支撑自身的体重,肌肉产生 $2\,000\text{ N}$ 的力,作用于第五腰椎的力为 $2\,230\text{ N}$.如果此人手提一 20 kg 重物,则 T 增至 $3\,220\text{ N}$, R 为 $3\,490\text{ N}$.这个数值是非常大的(相当于超过 300 kg 物体的重量),所以腰痛常起因于第五腰椎处并不意外.

同时,该结果也告诉我们,应当避免采取这种姿势,尤其在要提起重物时.如果换一种姿势,使膝盖弯曲但保持背部竖直,则此时躯干的整个重量的重心几乎直接位于骶骨之上,因而对骶骨的力矩就很小,这样肌肉也无需施加很大的力.作用于椎间盘上的力近似为须支持的总重量.对 70 kg 的人,如果提起 20 kg 的物体,骶骨受力近似为 680 N .对提起即使更重的物体,这也是一种安全的方法.

1.4 转动

在 1.3 节中介绍过的力矩为物体绕定轴转动提供了条件.本节将讨论质点(如月球绕地球)和刚体(如 CD 机光盘)等比较简单的转动.对于转动,用角位移、角速度和角加速度等角变量来描述最为方便.用这些量来描述转动的方程组在形式上和平动的方程组类似.下面首先引入一些角变量.

当光盘绕其中心旋转时,边缘上的点比近轴点的移动距离更大,因此移动速度更快.但在同样时间间隔内,它们将转过同样的角度.角速度(angular velocity) ω 的大小定义为通过转轴



的半径在单位时间内转过的角度

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1-14)$$

角速度是矢量,其方向这样规定:如用右手握着转轴,并使四根手指与转动方向一致,则此时大拇指所指的方向即是角速度的方向。

角位移 θ 的大小用弧度度量(见图 1-22),因为 $\theta = s/r$,代入式(1-1),可以得到线速度与角速度间的关系式,即

$$v = r\omega \quad (1-15)$$

一个绕轴旋转的质点或物体,其角加速度(angular acceleration) α 定义为角速度对时间的变化率,其大小由下式求得

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (1-16)$$

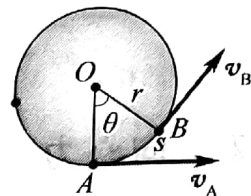


图 1-22 角位移的度量

ω 的单位是 rad/s, α 的单位是 rad/s².

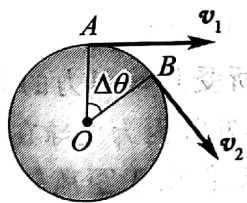
物体旋转时,物体上各点都具有径向加速度(见 1.4.1 节),若物体的角加速度不为零,则物体上各点既有径向加速度,又有切向加速度.某一点的切向加速度的大小为 $a_t = \Delta v / \Delta t$. 根据 $v = r\omega$ 得

$$a_t = r\alpha \quad (1-17)$$

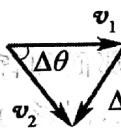
1.4.1 质点的圆周运动

质点的匀速圆周运动是指质点以匀速率沿圆形轨道运动.与匀速直线运动不同,质点的加速度 a 不等于 0,因为速度的方向是改变的.图 1-23 中表示了在圆轨道上相距一小角 $\Delta\theta$ 的两点的速度变化情况.加速度 a 的大小等于 $\Delta v / \Delta t$,由图 1-23(b) 的速度矢量图有 $\Delta v = v_2 - v_1$, Δv 指向圆心. 对一个很小的角度, Δv 的大小可近似表示为

$$\Delta v = v\Delta\theta$$



(a) 质点作匀速圆周运动



(b) 速度矢量图

图 1-23 匀速圆周运动速度分析

上式两端除以 Δt , 得

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

方程式左边是 a , 右边 $\Delta\theta / \Delta t$ 是 ω , 再由 $v = r\omega$ 代入得

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (1-18)$$

此处 a_c 称为向心加速度(centripetal acceleration)或径向加速度。“向心”二字表示它的方向指向圆心。



例 1.12 地球和大多数行星是在近于圆形的轨道上绕太阳旋转. 已知地球到太阳的距离为 1.49×10^8 km, 求向心加速度.

解 地球在一年的时间内绕太阳一周 (2π rad), 因此有

$$\omega = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} \approx 2 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

所以

$$a_c = r\omega^2 = (1.49 \times 10^{11}) \times (2 \times 10^{-7})^2 \approx 6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

1.4.2 向心力

任何质点若不沿直线运动, 则必然是受到了力的作用. 对圆周运动, 这个作用力指向圆心. 根据牛顿第二定律, 它的大小为

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \quad (1-19)$$

F_c 称为向心力 (centripetal force).

汽车在转弯时, F_c 是由轮胎与路面的摩擦提供的, 在高速和急转弯的情况下, mv^2/r 可能大于轮胎的摩擦力, 汽车则滑向更大半径的轨道 (见图 1-26).

在行星运动中, 向心力由万有引力提供. 由例 1.12 知, 地球和太阳间的向心加速度 $a_c = 6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$, 地球质量是 $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 因此向心力大小为

$$F_c = ma_c = 5.98 \times 10^{24} \times 6 \times 10^{-3} = 3.6 \times 10^{22} \text{ N}$$

航天飞船从月球返回地面, 飞船将受地心引力 $F_g = GmM/r^2$ (此处 m 是飞船的质量, M 是地球的质量) 的作用而拉向地面. 假如用制动火箭减慢飞船的速度并达到 $F_g > mv^2/r$, 飞船将盘旋着陆.

作圆周运动的物体, 如用绳捆着并使之旋转的物体 (见图 1-24), 它处在一个旋转的参考系中. 因为它的旋转, 有一个向外的力作用于其上, 此力称为离心力 (centrifugal force). 如旋转半径保持不变, 则向内的向心力等于向外的离心力. 虽然离心力仅是参考系旋转引起的结果, 但它确实是非常真实的.

由于在地球上面向月球那面和背向月球那面所受月球引力的大小不同, 因此使海洋变形而形成潮汐, 如图 1-25 所示, 阴影为海洋的“凸起处”. 因为地球在水下转动, 所以我们每天可观察到两次潮汐. 太阳也有很强的引力作用于地球, 但由于距离较远, 在地球近日面和远日面上的引力差别不大, 故引起的潮汐比月球引起的潮汐小得多.



图 1-24 离心力说明



图 1-25 潮汐



例 1.13 在公路的转弯处,路面需要倾斜多大角度才能使一辆赛车所受的反作用力 F 垂直于其车轮而不需要径向摩擦力?

解 如图 1-26 中的作用力矢量三角形所示,倾斜角 θ 应为

$$\tan \theta = \frac{F_c}{G} = \frac{mv^2/r}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

由于 θ 决定于速率,一个公路弯道仅对某一速率才是理想倾斜的,对其他速率只有靠摩擦力来阻止车辆滑动。

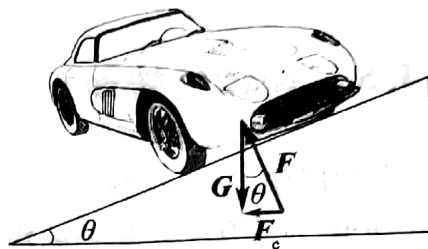


图 1-26 弯道的倾斜

1.4.3 离心机 and 细胞分离

在悬浮液中,一些不常见物质(如某些蛋白质)的密度可以用离心机进行测定.这种设备以很高的转速旋转液体样品,即以很大的离心力代替重力,因此使更致密的质点很快地沉淀到离心管的管底.离心机能分离密度不同的质点的原理可以这样理解:液体样品随离心机旋转,其不同密度的质点角速度都是 ω ,作用在其上的离心力大小为 $F = mr\omega^2$.单位体积的物质,密度大的相应质量也大,因此更致密的物质“甩”向外侧轨道,即向管底沉淀。

1.4.4 鸟的滑翔

鹰和其他许多鸟类,借助于垂直于它们的气动升力升在空中.它们在气流中盘旋以达到其所需高度.作圆周运动必须有一个向心力 F_c .鸟通过倾斜翅膀,使得上升力有一个水平分量,从而提供转弯所需的向心力。

我们用解析方法可以建立上升力 L 与速度 v 之间的关系式(见图 1-27).假设匀速升降,则在竖直方向上合力为零,因此 $L \cos \theta = G$.而上升力的水平分量即提供盘旋的向心力,所以

$$L \sin \theta = F_c = m \frac{v^2}{r}$$

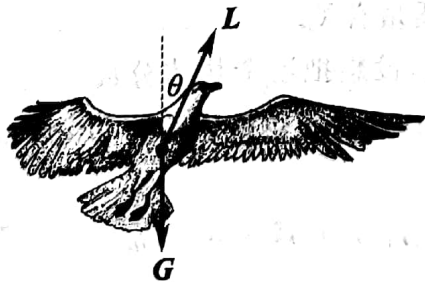


图 1-27 作用于正在滑翔的鸟上的力

消去 θ ,得

$$L^2 = m^2 g^2 + m^2 \frac{v^4}{r^2}$$

即

$$L = m \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}$$



故转弯半径越小,所需的上升力越大.

1.4.5 刚体的转动

任何时候,只要有绕定轴的净力矩作用于刚体,这个刚体就发生绕定轴的转动.前面我们已经知道,对于作平移运动的物体如何应用牛顿定律来求出加速度.只要知道了加速度就可预测出以后的运动.对于转动,我们同样也希望求出角加速度 α ,由此我们即可预测以后的运动.

对于转动来说,我们将证明决定物体角加速度的并不是合力而是有这些力所产生的力矩.我们用一个简单的例子来说明这一点.

如图1-28所示是一个系在绳子末端的物体,质量 m ,在无摩擦的平面上作水平的圆周运动.该物体受到两个力,指向圆心 c 的绳子张力 F_c 和与沿圆切线方向的外力 F_a .这两个力产生径向加速度和切向加速度, $F_c = ma_r$ 和 $F_a = ma_t$.

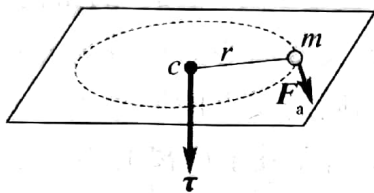


图1-28 力 F_a 对 c 点施加一个力矩

F_c 的作用线通过点 c ,因而对点 c 不产生力矩,对转动不起作用.而 F_a 对点 c 产生一个力矩 M ,即 $M = F_a r$.由牛顿第二定律 $F_a = ma_t$ 和 $a_t = r\alpha$ 可知, F_a 的力矩可以写成

$$M = F_a r = (mr\alpha)r = mr^2\alpha$$

定义点状物体的转动惯量(moment of inertia) J 为 mr^2 ,于是力矩方程为

$$M = J\alpha \quad (1-20)$$

这是牛顿第二定律在转动运动中的表现形式,式(1-20)对任意刚体都成立,并可叙述如下:对任一个绕固定轴转动的物体来说,加在该物体上的合力矩等于该物体的转动惯量和角加速度乘积.

尽管 $M = J\alpha$ 和 $F = ma$ 在形式上类似,但是力矩 M 和转动惯量 J 都和转轴的位置有关.此外, J 还和转动物体的形状和质量有关.

为计算复杂物体的转动惯量,设想把这个物体分成 N 小块,每一块的质量为 $m_1, m_2, \dots, m_N$,它们与旋转轴的距离为 $r_1, r_2, \dots, r_N$.该物体的转动惯量 J 是所有这些小块的转动惯量之和,即

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_N r_N^2 = \sum mr^2$$

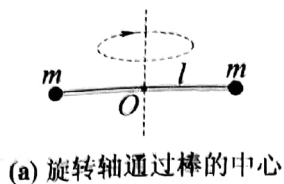
由此可见,物体离转轴越远,转动惯量越大.下面的例题说明了如何计算转动惯量.

例1.14 有两个相同的质点 m 位于一质量可以忽略的长度为 l 的细棒两端(见图1-29),求出绕垂直于该细棒并通过(1)中心和(2)一个端点的轴的转动惯量.

解 (1)对于通过中心的轴来说,每个质点和该轴的距离都是 $l/2$,把由这两个质量决定的两项 mr^2 相加起来就得到

$$J = m \left(\frac{l}{2} \right)^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{2}$$





(a) 旋转轴通过棒的中心



(b) 旋转轴通过棒的一端

图 1-29 棒绕不同的轴旋转

(2) 对于通过一个端点的轴来说,位于轴上的质点有 $r = 0$,而另一个质点则位于距离为 l 处,因而

$$J = 0 + ml^2 = ml^2$$

由此我们可以看到转动惯量与转轴的位置有关.

例 1.15 假定自行车车轮的质量都集中在轮圈和轮胎上(忽略轮条的质量),试求其转动惯量.

解 如果我们把轮胎分成许多小质元,每个质元离轴的距离都是 R ,因此

$$J = mR^2$$

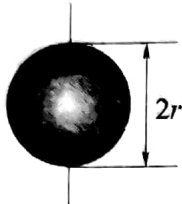
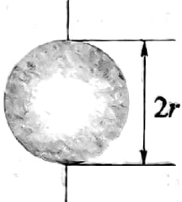
对于质量和半径给定的轮子而言,这样分布的转动惯量达到最大.正是由于转动惯量大,这就使自行车有某种稳定性.例如,由于 $\alpha = M/J$ 及 J 很大,因路面不平而产生的任何力矩都只能产生很小的角加速度.

常须求出质量连续分布的物体如棒和圆柱体的转动惯量,如果密度均匀,分布对称,那么可以用简单的积分运算求出转动惯量.表 1-3 列出了其中一些结果.

表 1-3 转动惯量

	$J = mr^2$	薄圆环 转轴为中心轴
	$J = \frac{m}{2}r^2$	薄圆环 转轴沿直径
	$J = \frac{m}{2}r^2$	圆柱体 转轴沿中心轴
	$J = \frac{m}{4}r^2 + \frac{m}{12}l^2$	圆柱体 转轴通过中心垂直于中心轴
	$J = \frac{1}{12}ml^2$	细棒 转轴通过中心垂直于长度



	$J = \frac{1}{3}ml^2$	细棒 转轴通过端点与棒垂直
	$J = \frac{2}{3}mr^2$	薄球壳 转轴为直径
	$J = \frac{2}{5}mr^2$	球体 转轴为直径

1.4.6 角运动和角动量

对于转动而言,相当于平移运动中起牛顿第二定律作用的公式是 $M = J\alpha$. 我们讨论平移运动时得到的所有公式在转动中也都有类似的规律. 这些都总结在表 1-4 中.

表 1-4 以恒定的角加速度 α 绕轴转动的方程组及对应的平动方程组

加速度 a 恒定的运动	角加速度 α 恒定的运动
$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = \frac{1}{2}(v + v_0)t$	$\theta = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$
$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

在表 1-4 中,我们列出了描写物体以恒定角加速度 α 绕转轴转动的方程组,转动的其他关系式及与之对应的平移运动关系式由表 1-5 给出.

表 1-5 平动和转动的比较

物理量	平动	转动	关系式
位移	s	θ	$s = r\theta$
速度	v	ω	$v = r\omega$
加速度	$a = a_t + a_r$	α	$a_t = r\alpha, a_r = \omega^2 r$
合力,合力矩	F	M	$M = r \times F$
质量,转动惯量	m	J	$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$
动量,角动量	$p = mv$	$L = J\omega$	



物理量	平动	转动	关系式
牛顿第二定律	$F = ma = \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$M = J\alpha = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	
平衡条件	$F = 0$	$M = 0$	

例如,平动的动能是 $\frac{1}{2}mv^2$,转动的动能是 $\frac{1}{2}J\omega^2$; J 取代 m , ω 取代 v . 任意时刻的角动量(对应平移运动中的动量 $p = mv$) 定义为

$$L = J\omega \quad (1-21)$$

冲量矩 $M\Delta t$ 和角动量之间的关系式为

$$M\Delta t = \Delta L = J\Delta\omega \quad (1-22)$$

此式意味着在 Δt 时间内力矩 M 使角动量 L 改变了 ΔL . 由此,角动量守恒定律可叙述为:如果作用在物体上的外力矩为零,这个物体的角动量保持不变.

许多人都有在轮椅上旋转的经验. 当摩擦很小时,力矩也很小,角动量近似是守恒的. 开始旋转时伸开腿和手臂,然后再把腿和手臂收起来,人的转动惯量减小,因而角速度增加(见图 1-30). 这可以由 $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ 得出这一结果. 通过下面这个例题会更清楚地了解角速度发生的变化.

例 1.16 一个体重 70 kg 的人坐在可自由旋转的椅子上,如图 1-30 所示,开始旋转时其上肢向两侧伸直并各手握一个 5 kg 的哑铃,角速度为 3 rad/s. 假设他对转轴的转动惯量与半径为 25 cm 的实心圆柱体相同,他把手放至胸前,哑铃对转轴的旋转半径从 80 cm 变为 10 cm,求此时角速度是多少?

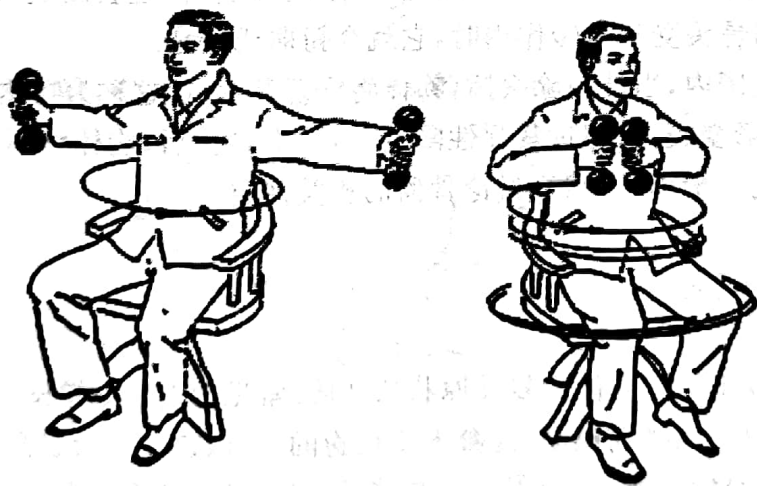


图 1-30 转动惯量的改变引起角速度的变化

解 由于没有外力矩作用于此系统,所以角动量守恒,即

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

最初的转动惯量是

$$J_1 = J_{\text{人}} + J_{\text{哑铃}}$$

$$J_{\text{人}} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times 70 \times 0.25^2 = 2.19 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



$$J_{1(\text{哑铃})} = 2mr^2 = 2 \times 5 \times 0.8^2 = 6.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_1 = 2.19 + 6.4 = 8.59 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

最后的转动惯量是

$$J_2 = J_{2(\text{人})} + J_{2(\text{哑铃})}$$

$$J_{2(\text{人})} = J_{1(\text{人})} = 2.19 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{2(\text{哑铃})} = 2mr^2 = 2 \times 5 \times 0.15^2 = 0.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_2 = 2.19 + 0.23 = 2.42 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

由 $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ 得 $\omega_2 = (J_1/J_2)\omega_1$, 故

$$\omega_2 = \frac{8.59}{2.42} \times 3 = 10.6 \text{ rad/s}$$

由于转动惯量变化而引起角速度变化是很常见的. 一个花样滑冰运动员开始以一只腿下蹲, 接近冰面, 并将另一条腿及两上肢伸直进行旋转, 当她站起来并把她的腿和上肢收拢靠近身体时, 她的转动惯量减小了, 她的角速度则会增加. 这和上例一样, 其角速度的变化是很明显的. 同样, 体操运动员和跳水运动员在空中转体时, 总是把身体缩成一团, 因为这样能使他们在接触垫子或水面前多转几圈(因为减小了转动惯量而会有更大的角速度).

1.5 骨的力学性质

在物体的大小和形状不改变的假定下, 我们已经讨论了它们的运动和平衡的规律. 此时, 对研究的物体采用了质点或刚体模型. 然而, 由任何实际材料制成的物体在受到力或力矩的作用时, 其形状和大小都多少会发生变化, 即产生一定的形变, 甚至会断裂. 例如, 当梁上挂有重物时, 梁就会弯曲; 当骨头受到扭转作用时, 它就会扭曲或断裂.

若形变在一定范围内, 当外力除去后, 物体将恢复其原状, 这称为物体的弹性. 所有物质都具有弹性. 若外力和形变较大, 超过其弹性限度, 当外力除去后, 物体将不能恢复其原状. 本节首先描述材料形变的一般理论, 然后讨论骨骼的相关性质.

1.5.1 应力和应变

所有物质都能发生形变并能恢复其原状的性质. 常见的例子如橡皮和钢. 高大的建筑物在强风中会出现几十厘米的横向摆动. 混凝土是很脆的, 所以建筑师给它们加进钢筋以增加它们的韧性. 钢是弹性很大的物质, 可用作汽车的弹簧钢板、钟表的发条等.

钢的弹性和橡皮的弹性有很大的差别. 钢的弹性恢复力主要是由于原子间距离的变化, 其最大拉伸率为 0.15%. 橡皮则可拉至原长的 3 倍. 橡皮由长而可伸缩的分子组成, 在特定点由硫原子交联起来. 当它被拉长时, 分子也被拉长而改变了它们的“平均”形状. 当外力除去后, 分子的随机运动使它们回复到它们的“最可能的”长度. 橡皮样弹性不仅仅橡皮才有, 通常交联的高聚合物也有. 在自然界中, 昆虫用一种称为节肢弹性蛋白的弹性蛋白来增加弹跳的力量. 而脊椎动物把一种称为弹性硬蛋白的弹性蛋白用在结缔组织和动脉管壁中, 特别在靠近心脏的地方.



如果一个力把橡皮带拉长至一定距离,那么要拉长两根这样的橡皮带产生同样的距离,则要两倍的作用力,或使横截面为两倍的橡皮带产生同样的距离需要的作用力也要加倍.因此,材料的形变是由单位面积的作用力而不是总的作用力决定的.所以对于受力为 F 截面积为 S 的棒,我们定义应力

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1-23)$$

通常定义三类应力,如图 1-31 所示.张应力是使一个物体伸长的单位面积的作用力;压应力的作用是使物体压缩;切应力的作用是使物体发生扭曲.应力的单位是 N/m^2 .

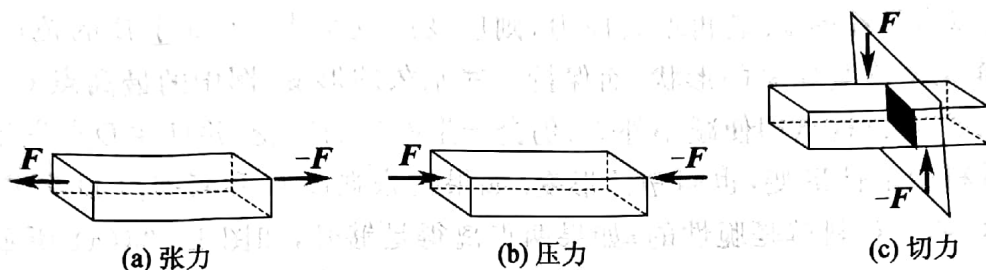


图 1-31 物体的应力

物体受力时发生的形变,包括长度、形状和体积的变化,衡量形变程度的物理量称为应变.与三种应力对应的有三种应变:张应变、压应变和切应变.物体的任何形变可认为是这三种应变的组合.

1. 张应变和压应变

在张应力和压应力的作用下,棒的长度改变量与它的长度成正比.例如,长 l 的棒在受到张力 F 的作用时伸长了 Δl ,则张应变 ϵ 等于长度的相对改变量(见图 1-32),即

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1-24)$$

从定义看 ϵ 是无量纲的,式(1-24)也是压应变的定义.

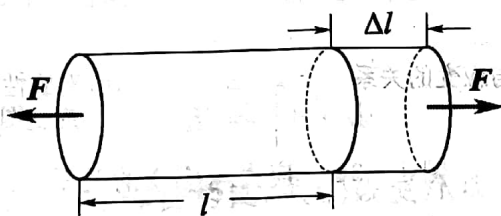


图 1-32 张应变

2. 切应变

在切应力的作用下,一长方体发生扭曲,如图 1-33 所示.所有与底面平行的截面都发生相对位移,其应变值可由角 θ 来量度,切应变为

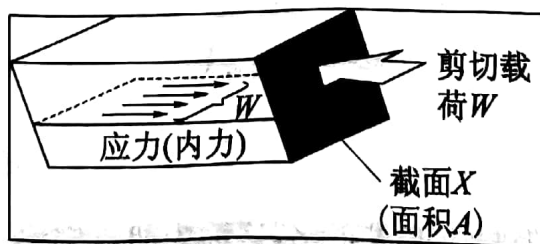


图 1-33 切应变



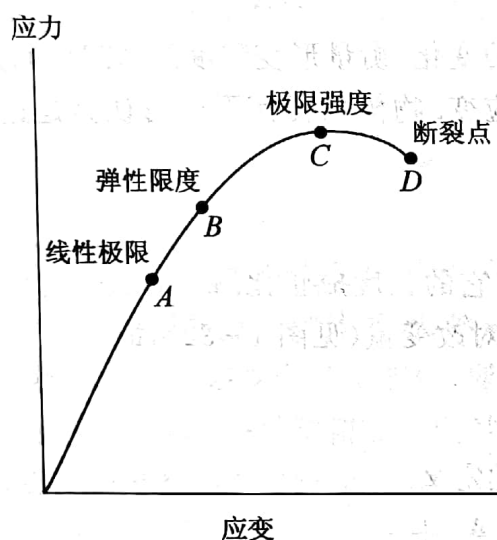
$$\epsilon_{\text{切}} = \frac{\Delta x}{l} = \tan \theta$$

(1-25)

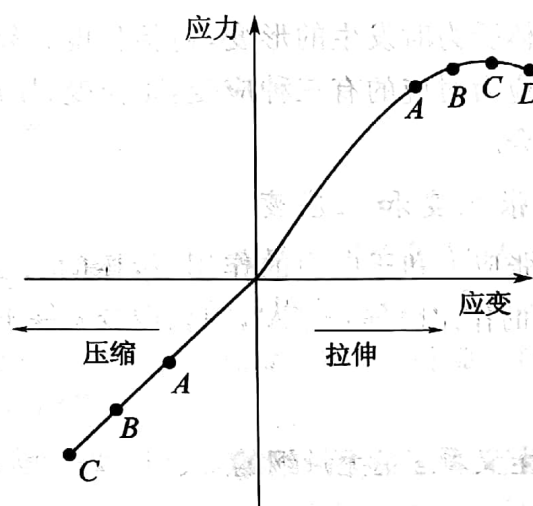
3. 应力和应变的关系

在张力作用下,材料的应力和应变之间的关系可以从实验上测得.把一根棒逐渐拉长,每伸长一小段距离记录下所需要加的力,长度的相对该变量就是应变,力除以面积就是应力.图 1-34 是得到的典型结果.对压应力和切应力也可得到类似的图.

当应变的值不大时,应力与应变成正比,这段值称为材料的线性范围;超过线性极限 A,应力与应变不再成正比关系.应变在到达弹性限度 B 前,外力除去后,物体将恢复原来的形状.所以此时的形变称为弹性形变.若再增大应力,则应变继续增大.在超过 B 的范围,当外力去除后,物体将不能完全恢复原来的形状,而保持一些永久的形变.图中的最高点 C 是材料的抗张强度或极限强度.超过这点即使减小外力,仍会产生附加的应变,并且在 D 点发生断裂.从 B 点到 D 点称为材料的范性形变,也叫塑性形变.如果抗张强度 C 和断裂点 D 紧靠在一起,如图 1-34(b) 所示,那么材料就是脆性的;如果两点离得足够开,如图 1-34(a) 所示,则称材料是延展性的.



(a) 对延展性的金属，张应力与应变的关系



(b) 对脆性材料(如骨头)的应力-应变图, D点与C点非常靠近

图 1-34 应力与应变的关系

讨论材料的应力和应变性质,还必须提到所有材料都会出现疲劳现象.材料在经过多次的施加外力和撤去外力后,其极限强度将逐渐减小,因而最终在很小的应力作用下材料也会损坏.例如,将一只回形针来回弯曲几次后,就更容易折断.在各种应用中,如设计桥梁、研制插入到骨骼裂缝中的销钉都必须考虑这种疲劳效应.对于材料疲劳的原因还不甚明了,但是可以确定,在反复形变之后,材料内部分子结构发生了变化.这些变化导致分子间的作用力减小,从而使材料的强度下降.

1.5.2 弹性模量

在材料的线性范围内,应力与应变成正比,这称为胡克定律.在线性区,应力与应变之比称为弹性模量.当材料受到拉伸和压缩作用时,胡克定律的形式为



扫描全能王 创建

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{或} \quad \sigma = E\epsilon \quad (1-26)$$

式中,系数 E 称为材料的杨氏模量.对于均匀的材料,如钢,压缩和拉伸的杨氏模量通常是相同的.对于非均匀的材料,如混凝土和骨骼,压缩和拉伸的杨氏模量则是不同的.表1-6列出了各种材料的杨氏模量、极限抗张强度和极限抗压强度.

表 1-6 一些典型材料的杨氏模量和极限强度

材料	杨氏模量 $/(N/m^2)$	极限抗张强度 $/(N/m^2)$	极限抗压强度 $/(N/m^2)$
钢	20×10^{10}	5×10^8	
铝	7×10^{10}	2×10^8	
玻璃	7×10^{10}	5×10^7	11×10^8
骨(拉伸)	1.6×10^{10}	1.2×10^8	
骨(压缩)	0.9×10^{10}		1.7×10^8
腱	0.2×10^8		

例 1.17 设一条腿骨长为 1.2 m, 平均横截面积为 5 cm^2 . 当用此腿支持整个体重(约 700 N) 时, 其长度缩短多少?

解

$$\Delta l = \frac{l_0 F}{SE} = \frac{1.2 \text{ m} \times 700 \text{ N}}{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \times (0.9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)} = 1.9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.19 \text{ mm}$$

当材料受到切应力作用时, 胡克定律的形式为

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{l_0} \quad (1-27)$$

式中, 系数 G 称为材料的切变模量. 大多数材料的切变模量是杨氏模量的 $1/2 \sim 1/3$.

在弹性限度内, 外力作用于弹性物体(如弹簧), 使其发生弹性形变. 这一过程中, 外力做的功为

$$W = \int F \cdot dl$$

这也就是储存在弹性体中的能量, 即弹性势能. 我们以受压应力或张应力作用的一根弹性棒为例求弹性势能的表达式.

根据胡克定律 $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$, 所以有

$$W = \int F \cdot dl = \int_{l_0}^l \frac{ES}{l_0} (l - l_0) dl = \frac{1}{2} \frac{ES}{l_0} (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} \frac{ES}{l_0} \Delta l^2$$

即弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

式中, $k = \frac{ES}{l_0}$, 称为材料的倔强系数.

由胡克定律也易推出, 在拉伸和压缩下, 作用于物体的力与它的伸长量成正比, 即

$$F = k \Delta l$$



式, k 为倔强系数。

只要一个物体受到的应力在线性范围内, 则物体的行为就像是一根弹簧。硬的弹簧 k 值大。从 k 的定义可知, 增加截面积和减小长度皆可增大物体的弹性。

1.5.3 骨的力学性质

由于骨对人体正常活动的重要性, 许多医学专家都从事有关骨的研究课题。例如, 牙科与矫形外科专注于这一领域。前面研究了人在站立、行走、跳跃等活动时涉及的静力学与动力学的负载力问题。本节讨论骨骼的结构、功能以及它的应力和应变的性质。

骨的主要功能至少有 6 种: 支持、运动、对各种器官的保护、化学物质的储存、营养和声音的传递(在中耳内)。有些动物的骨还与生殖有关。

人体有 206 块骨, 按照形状可将其分为五类: 第一类是长而空心的骨, 如四肢骨和指骨; 第二类是一些扁平、板状的骨, 如肩胛骨和颅骨; 第三类是脊椎骨, 呈圆柱形; 第四类是形状不规则的骨, 如腕骨及踝骨; 第五类是不同于前四类的骨, 如肋骨。

1. 骨的结构与力学特性

骨主要由骨质、骨髓和骨膜三部分构成。骨质分两种: 骨密质和骨松质。骨密质分布于骨表面, 质地致密, 抗压强度较高; 骨松质由相互交织按一定方向排列的骨小梁构成, 质地疏松但具有一定的韧性, 能承受较大的弹性形变。不同骨骼的骨密质和骨松质分布不同。长骨的骨密质主要分布在中间的骨干, 骨松质主要分布在长骨的两端; 短骨的骨密质分布于表面, 内部充满骨松质。扁骨由骨密质构成内外两层骨板, 中间夹一层骨松质。骨由两种不同的物质加水组成: 一种是胶原, 主要是有机成分, 约占骨重的 40% 与体积的 60%; 另一种是骨矿物质, 即骨的无机成分, 约占骨重的 60% 与体积的 40%。二者中任一成分都可从骨中分离出来。骨胶原是存在于筋腱、韧带和皮肤中的一种纤维蛋白, 胶原纤维能拉至大于本身长度的 20%, 其离骨抗张强度约为 $9 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ 。若把骨胶原从骨中分离, 则剩下的骨矿物质是很脆的, 用手指就能碾碎。除去胶原的最简便办法是将骨放在炉中烧成灰。骨矿物质有较大的抗压强度。骨的构成类似于钢筋混凝土。胶原赋予骨质大的抗张强度和韧性, 而骨矿物质给予它在支撑时所需的抗压强度。

2. 长骨的抗压强度和抗弯强度

由股骨所代表的那种长大的骨, 是人体的主要受力部分。两端称骨骺, 位于二者之间的主要部分为骨干, 骨干中空, 呈管状, 所以也把长骨称管状骨。骨骺的表面由骨密质构成, 内部由骨松质构成。骨干壁则只由骨密质形成, 有较大的强度和硬度。骨骺的骨松质, 由于负重发展成花岗岩大 20 倍。

例 1.18 如果成年人股骨的最小截面积是 3 cm^2 , 问受多大的压力作用将发生碎裂?

解 从表 6-1 可知, 骨的极限抗压强度 σ_c 是 $1.7 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, 所以

$$F = \sigma_c S = (1.7 \times 10^8 \text{ N/m}^2) \times (3 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 5.1 \times 10^4 \text{ N}$$

这个力相当大, 是体重 70 kg 人重量的 70 多倍。如果一个人从几米高处跳到坚硬的地面上, 骨的受力就会超过这个值。



骨骼的变形、损失和破坏与受力的方式有关。人体骨骼受力可以分为4种基本形式,除受拉伸与压缩作用外,还受到弯曲和扭转的作用。

在仅仅受到压应力或张应力时,物体的形状并不重要,这是因为形变只与横截面积有关。但是,在还未断裂的情况下,一个物体弯曲或反抗弯曲的能力则不仅同材料种类有关,也与物体形状有关。例如,相同长度下,同样数量的材料构成的空心管比实心柱的强度更高。对长骨弯曲时的应力可用对建筑物横梁一样的方法来分析。

如图1-35(a)所示,横梁置于两个支持物上,在自重或竖直方向外加载荷的作用下发生弯曲。横梁中出现的应力如图1-35(a)箭头所示。梁的上部由于被挤压出现压应力,而下部处于拉伸状态因而受到张压力。中间长度没有变化的面称为中立面,此处应力为零。中立面一般位于上下两水平对称面的中间位置。所以横梁上应力的分布如图1-35(b)所示,从顶部的压应力到底部的拉张应力,并且离中立面越远的面所受应力越大,靠近中立面所受应力最小。一般而言,任何形式的梁的中部都受到很小的应力。因此,为了制造强度大而且轻巧的结构件,应该将大多数材料分布在离中立面尽量远的地方。通常都用一“工”字形(截面)横梁作为建筑物的支持梁,即截面两端厚中间薄。与用同样数量材料制成的截面为长方形的梁相比,前者更能承受垂直于其长度的力产生的弯曲作用。而同时两根梁可以承受的外加压力相同,这是因为它们的横截面积相同。同样,一根空心管与一根长度和质量相同的实心棒相比,具有更大的抗弯强度,这就是为什么金属做的桌子和椅子的腿通常都是空心的原因。

空心结构比同样截面积的实心体更为坚固这个原理在自然界中得到广泛的应用。一般人和动物的四肢骨都是空心的。例如,在人的股骨中,内外半径之比约为0.5,截面积是具有同样抗弯强度的实心骨的75%。

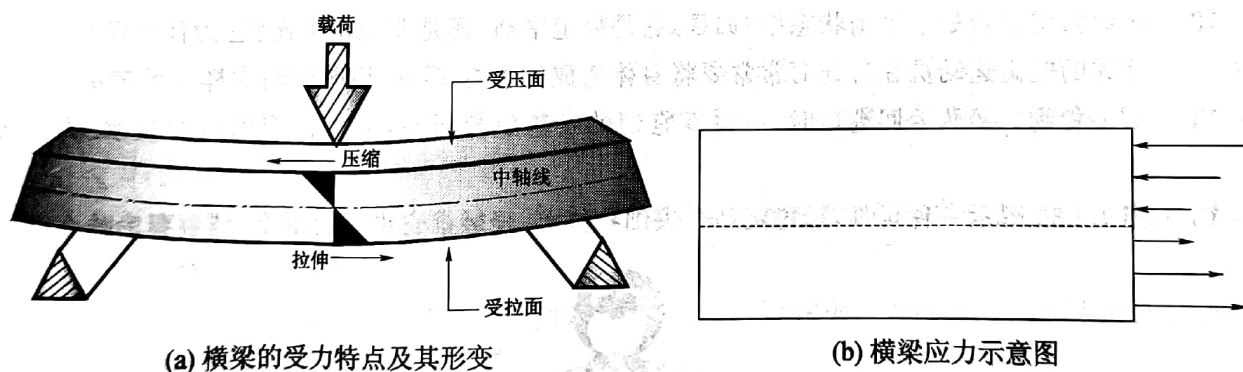


图1-35 横梁在自重或竖直方向外加载荷作用下弯曲时所受应力的分布

3. 骨的应力刺激

骨是活组织,终生都在变化。老骨不断破坏和新骨不断生长叫做“骨重建”的过程,这是由两种特殊的骨细胞进行的。破坏骨的是破骨细胞,生长骨的是成骨细胞。应力刺激对骨重建过程起调节作用。一定范围内经常、间歇式的应力刺激能帮助骨生长,使骨密度加大。实验表明,骨的密度增加5%,抗断裂性能增加30%。骨的应力刺激减少,会使骨的破坏大于骨的生长,导致骨质疏松,骨骼萎缩。如长期卧床的病人,重力及肌肉运动引起的应力刺激明显减少。以及长期处于失重状态下的宇航员,同样都会引起骨质疏松和骨骼萎缩。要促进骨生长,必须有经常、间歇式的应力刺激,尤其是压应力对骨组织的影响最大。体育锻炼是这种应力刺激的好形式。应力刺激对骨的生长和修复的作用细节还没有清楚地了解,但有迹象表明,这与局部电场有关。应力作用于骨上,其表面会出现电荷,有人认为此现象(压电效应)对骨的生长和修复构成



物理刺激. 用动物的折裂骨做实验的结果显示, 若在折裂处加一电场, 骨折就愈合得快些.

* 习 题 1

- 1-1 一条鲑鱼以初速度 6 m/s 从水中垂直跃出. 问: (1) 它能跃多高? (2) 鲑鱼能在水面以上停留多久?
- 1-2 试从表 1-1 计算蝗虫的平均起跳加速度, 假定加速度为恒量. 并将结果与例题 1.4 中人的结果进行比较.
- 1-3 穿上宇宙服的宇航员在地球表面可以垂直跃起 0.5 m . 火星上的引力加速度是地球上重力加速度的 $4/10$. 假设他具有同样的起跳速度, 问宇航员在火星上能跃起多高?
- 1-4 如果人能获得与跳蚤相等的起跳加速度, 问他能跳多高?
- 1-5 (1) 试解释为何作立定跳远的人取 45° 的起跳角并不能跳得最远. (2) 起跳角应该大于, 还是小于 45° ?
- 1-6 袋鼠可以跳 8 m 远. 如果它与水平方向成 45° 起跳, 它的起跳速率为多少?
- 1-7 借助于简图, 说明以一定速率从低于着地点发射的物体的最大射程出现在大于 45° 的发射角.
- 1-8 在滑雪道中, 斜坡与水平面成 45° . 设滑雪板与雪之间的动摩擦系数是 0.1 . 求: (1) 滑雪者的加速度; (2) 在斜坡上滑行 40 m 后达到的速度.
- 1-9 当压力达到 $2 \times 10^5 \text{ N}$ 时, 人的股骨会碎裂. 如果质量为 60 kg 的人用一条腿着地, 那么有力压在股骨上. 问: (1) 引起股骨碎裂的加速度是多大? (2) 此加速度是重力加速度的几倍?
- 1-10 质量为 55 kg 的妇女想从静止的绳子上滑下, 该绳能支持的最大力为 400 N . 该妇女要安全地从绳上滑下的最小加速度为多少?
- 1-11 沿着被雪覆盖的水平地面拉一副重为 $1\,000 \text{ N}$ 的雪橇. 设静摩擦系数是 0.3 , 滑动摩擦系数是 0.15 . 求: (1) 使雪橇开始运动时的力; (2) 使雪橇保持匀速运动所需的力.
- 1-12 比萨斜塔是否处于平衡状态中? 如是, 它是稳定平衡, 还是非稳定平衡? 它为什么没有倒塌?
- 1-13 优秀的跳高运动员在过杆时常常要将身体弯成倒 V 字形, 试说明他们这样做的理由.
- 1-14 不装货物的船队返回港口时, 有时在它们的货舱里装石头, 或者在密闭舱内装水. 为什么要这样做?
- 1-15 图 1-36 图示一种玩具, 能稳定站在尖细物体上, 轻轻推它也不会落下. 请解释为什么.

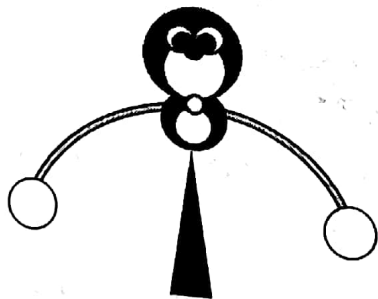
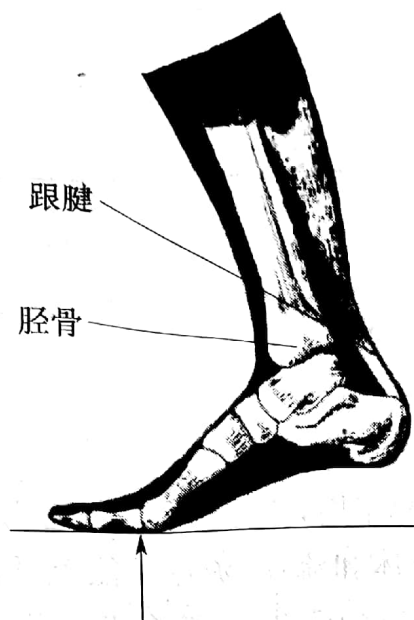


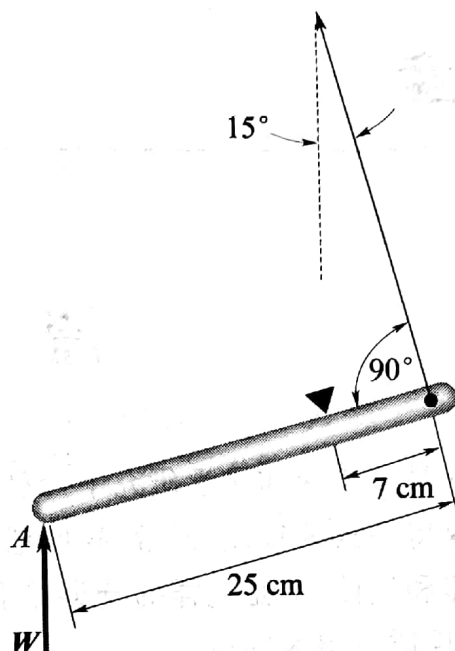
图 1-36 习题 1-15 图

- 1-16 用三角几何知识计算例 1.11 中的 θ , 数据如图 1-15 所示.
- 1-17 一个重 70 kg 的人用一只脚的足趾站立, 如图 1-37 所示, 图 1-37(b) 为其杠杆表示. 求: (1) 跟腱的张力; (2) 胫骨对踝关节的作用力.





(a) 用一只脚的足趾站立时, 脚的受力点



(b) 脚受力的示意图

图 1-37 习题 1-17 图

1-18 若例 1.11 中肘部的角度为 90° , 前臂仍保持水平, 臂的尺寸数据不变, 试计算肱二头肌产生的力 F_m 和肘关节处受到的力 F_r .

1-19 一辆赛车绕一半径为 1 km 的弯道行驶. 若在速率为 60 m/s 时摩擦力为零, 则弯道倾斜的角度是多大?

1-20 为什么在道路很湿滑的情况时, 以低速在陡斜的弯道上行车是不安全的?

1-21 燕子以 18 m/s 的速度在一个半径为 15 m 的水平圆弧上飞翔. 试求: (1) 它的加速度; (2) 它的倾斜角.

1-22 地球的半径为 6 400 km, 它每 24 h 自转一周. (1) 在赤道上的向心加速度是多少? (2) 若一个人在北极处重 700 N, 那么他在赤道处的有效重量是多少? (3) 地球实际上不是很好的球体, 而是两极稍扁, 赤道略鼓的椭球体. 这对 (2) 中的答案有何影响?

1-23 超速离心机在离转轴 0.05 m 处产生一个等于重力加速度 300 000 倍的径向加速度. 其角速度是多少? 分别用弧度每秒和转每分来表示.

1-24 游乐园中的摩天轮每 20 s 转一次, 它的半径为 10 m: (1) 用弧度每秒表示其角速度; (2) 乘客的径向加速度是多少?

1-25 为什么人在围墙上走时要把两臂张开?

1-26 一个人坐在一张可以自由转动的椅子上, 双手各持一个质量为 5 kg 的物体. 双手放在膝上时, 他绕垂直轴转动的转动惯量为 $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 当他双臂伸出时其总转动惯量为 $35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 一开始他的两手放在膝上, 其角速度为 3 rad/s. (1) 伸出双臂时角速度是多少? (2) 如果伸出双臂时丢下重物, 则他的角速度是多少?

1-27 一个身高为 h 的跳水运动员想做双手抱膝向前翻滚两周入水的动作. 她离开跳板时是直立的, 角速度为 2.0 rad/s. 直立时的回转半径为 $0.25h$, 而双手抱膝时的回转半径为 $0.1h$. (1) 她双手抱膝时的角速度是多少? (2) 转过两圈所需要的最短时间是多少? (3) 如果她开始时在垂直方向的平移运动速度为零, 那么要使跳水成功, 跳板离开水面的最小高度是多少? (4) 个子高对做这个跳水动作有没有好处?

